

Xavier Oliver Olivella
Carlos Agelet de Saracíbar Bosch

Mecànica de medis continus per a enginyers



Mecànica de medis continus per a enginyers

POLITEXT

Xavier Oliver Olivella
Carlos Agelet de Saracíbar Bosch

Mecànica de medis continus per a enginyers

Compilació:
Eduardo Vieira Chaves
Eduardo Car

EDICIONS UPC

Primera edició: juny de 2003
Reimpressió: novembre de 2011

Aquest obra compta amb el suport
de la Generalitat de Catalunya

En col·laboració amb el Servei de Llengües i Terminologia de la UPC.

Disseny de la coberta: Manuel Andreu

Traducció realitzada per Incyta

© Els autors, 2003

© Iniciativa Digital Politècnica, 2003
Oficina de Publicacions Acadèmiques Digitals de la UPC
Jordi Girona Salgado 31,
Edifici Torre Girona, D-203, 08034 Barcelona
Tel.: 934 015 885 Fax: 934 054 101
www.upc.edu/idp
E-mail: info.idp@upc.edu

Producció: SERVICE POINT
Pau Casals, 161-163
08820 El Prat de Llobregat (Barcelona)

Dipòsit legal: B-33833-2003

ISBN: 978-84-9880-436-2

Qualsevol forma de reproducció, distribució, comunicació pública o transformació d'aquesta obra només es pot fer amb l'autorització dels seus titulars, llevat de l'excepció prevista a la llei.

Índex

1 Descripció del moviment

1.1	Definició de medi continu	1
1.2	Equacions del moviment	1
1.3	Descripcions del moviment	5
1.4	Derivades temporals: local, material, convectiva	7
1.5	Velocitat i acceleració	9
1.6	Estacionarietat	12
1.7	Trajectòria	13
1.8	Línia de corrent	15
1.9	Tub de corrent	17
1.10	Línia de traça	18
1.11	Superfície material	20
1.12	Superfície de control	22
1.13	Volum material	23
1.14	Volum de control	24

2 Descripció de la deformació

2.1	Introducció	25
2.2	Tensor gradient de deformació	25
2.3	Desplaçaments	28
2.4	Tensors de deformació	30
2.5	Variació de les distàncies: Estirament, allargament unitari	33
2.6	Variació d'angles	36
2.7	Interpretació física dels tensors de deformació	38
2.8	Descomposició polar	42
2.9	Variació de volum	44
2.10	Variació de l'àrea	46
2.11	Deformació infinitesimal	47
2.12	Deformació volumètrica	56
2.13	Velocitat de deformació	58
2.14	Derivades materials dels tensors de deformació i altres magnituds	62

2.15	Moviments i deformacions en coordenades cilíndriques i esfèriques	65
3	Equacions de compatibilitat	
3.1	Introducció	71
3.2	Exemple preliminar: Equacions de compatibilitat d'un camp vectorial potencial	72
3.3	Condicions de compatibilitat per a les deformacions infinitesimals	74
3.4	Integració del camp de deformacions infinitesimals	77
3.5	Equacions de compatibilitat i integració del tensor velocitat de deformació	82
4	Tensió	
4.1	Forces massiques i superficials	83
4.2	Postulats de Cauchy	86
4.3	Tensor de tensions	88
4.4	Propietats del tensor de tensions	96
4.5	Tensor de tensions en coordenades curvilínies ortogonals	103
4.6	Cercle de Mohr en 3 dimensions	105
4.7	Cercle de Mohr en 2 dimensions	110
4.8	Cercle de Mohr per a casos particulars	122
5	Equacions de conservació-balanç	
5.1	Postulats de conservació-balanç	125
5.2	Flux per transport de massa o flux convectiu	125
5.3	Derivada local i derivada material d'una integral de volum	129
5.4	Conservació de la massa. Equació de continuïtat	134

5.5	Equación de balanç. Teorema del transport de Reynolds	136
5.6	Expressió general de les equacions de balanç	138
5.7	Balanç de la quantitat de moviment	141
5.8	Balanç del moment de la quantitat de moviment (moment angular)	143
5.9	Potència	146
5.10	Balanç de l'energia	151
5.11	Processos reversibles i irreversibles	157
5.12	Segon principi de la termodinàmica. Entropia	159
5.13	Equacions de la mecànica de medis continus. Equacions constitutives	166

6 Elasticitat lineal

6.1	Hipòtesi de la teoria de l'elasticitat lineal	169
6.2	Equació constitutiva elàstica lineal. Llei de Hooke generalitzada	171
6.3	Isotropia- Constants de Lamé- Llei de Hooke per a elasticitat lineal isòtropa	174
6.4	Llei de Hooke en components esfèrics i desviadors	176
6.5	Limitacions en els valors de las propietats elàstiques	178
6.6	Plantejament del problema elàstic lineal	180
6.7	Resolució del problema elàstic lineal	185
6.8	Unicitat de la solució del problema elàstic lineal	188
6.9	Principi de Saint-Venant	193
6.10	Termoelasticitat lineal. Tensions i deformacions tèrmiques	195
6.11	Analogies tèrmiques	198
6.12	Principi de superposició en termoelasticitat lineal	208
6.13	Llei de Hooke en funció dels "vectors" de tensió i de deformació	212

7	Elasticitat lineal plana	
7.1	Introducció	215
7.2	Estat de tensió plana	215
7.3	Deformació plana	219
7.4	El problema elàstic lineal en elasticitat bidimensional	222
7.5	Problemes assimilables a elasticitat bidimensional	223
7.6	Corbes representatives dels estats plans de tensió	226
8	Plasticitat	
8.1	Introducció	233
8.2	Nocions prèvies	233
8.3	Espai de tensions principals	237
8.4	Models reològics de fricció	242
8.5	Comportament fenomenològic elastoplàstic	251
8.6	Teoria incremental de la plasticitat en una dimensió	253
8.7	Plasticitat en tres dimensions	260
8.8	Superfícies de fluència. Criteris de falla	261
9	Equacions constitutives en fluids	
9.1	Concepte de pressió	273
9.2	Equacions constitutives en mecànica de fluids	276
9.3	Equacions constitutives (mecàniques) en fluids viscosos	277
9.4	Equacions constitutives (mecàniques) en fluids newtonians	277
10	Mecànica de fluids	
10.1	Equacions del problema de mecànica de fluids	285

10.2	Hidrostàtica. Fluids en repòs	287
10.3	Dinàmica de fluids: fluids perfectes barotròpics	293
10.4	Dinàmica de fluids: fluids viscosos (newtonians)	303
10.5	Condicions de contorn en la mecànica de fluids	309
10.6	Flux laminar i flux turbulent	313
11	Principis variacionals	
11.1	Preliminars	317
11.2	Principi (teorema) dels treballs virtuals	323
11.3	Energia potencial. Principi de minimització de l'energia potencial	328
	Bibliografia	331

Presentació

Aquest text neix amb la vocació de ser una eina per a la formació dels enginyers en la mecànica de medis continus. De fet, és el fruit de l'experiència de molts anys en l'ensenyament d'aquesta disciplina a l'Escola d'Enginyers de Camins de la Universitat Politècnica de Catalunya, tant en cursos de grau (titulacions d'Enginyeria de Camins, Canals i Ports i Enginyeria Geològica) com de postgrau (cursos de màster i de doctorat).

A diferència d'altres textos d'introducció a la mecànica de medis continus, el que es presenta aquí està orientat específicament a l'enginyeria, i intenta mantenir un equilibri adequat entre el rigor de la formulació matemàtica utilitzada i la claredat dels principis físics tractats, encara que posant en tot moment el primer al servei de la segona. En aquest sentit, en les imprescindibles operacions vectorials i tensorials s'utilitzen simultàniament tant la notació indicial (de més utilitat per a la demostració matemàtica rigorosa) com la notació compacta (en la que s'entreu amb més claredat la física del problema), tot i que a mesura que s'avança en el text hi ha una clara tendència cap a la notació compacta en un intent de focalitzar l'atenció del lector en el component físic de la mecànica de medis continus.

El contingut del text està clarament dividit en dues parts que es presenten seqüencialment. En la primera part (capítols d'1 a 5) s'introdueixen els aspectes fonamentals i descriptius comuns a tots els medis continus (moviment, deformació, tensió i equacions de conservació-balanç). En la segona (capítols de 6 a 11) s'estudien famílies específiques de medis continus, com són els sòlids i els fluids, en un plantejament que comença amb l'equació constitutiva corresponent i acaba amb les formulacions clàssiques de la mecànica de sòlids (elàstics-lineals i elastoplàstics) i de la mecànica de fluids (règim laminar). Finalment, es fa una incursió breu en els principis variacionals (principi dels treballs virtuals i de minimització de l'energia potencial) com a ingredients de partida en la resolució de problemes de mecànica de medis continus mitjançant mètodes numèrics. Aquesta estructura permet la utilització del text amb propòsits docents tant en un únic curs d'unes 100 hores lectives, com en dos cursos diferenciats: el primer basat en els cinc primers capítols i dedicat a la introducció dels fonaments de la mecànica de medis continus i el segon dedicat específicament a la mecànica de sòlids i la mecànica de fluids.

Finalment, els autors volen expressar el seu agraïment al doctor Eduardo Vieira Chaves i al doctor Eduardo Car pel treball acurat de compilació d'una primera versió d'aquest text a partir de les notes de classe i personals dels autors. Així mateix, volen agrair al professor Ramón Codina els seus suggeriments i les correccions oportunes sobre les primeres versions del text.

Barcelona, setembre de 2002

Xavier Oliver Olivella

i

Carlos Agelet de Saracibar Bosch

1 Descripció del moviment

1.1 Definició de medi continu

S'entén per *medi continu* un conjunt infinit de partícules (que formen part, per exemple, d'un sòlid, d'un fluid o d'un gas) que serà estudiat macroscòpicament, és a dir, sense considerar les possibles discontinuïtats existents en el nivell microscòpic (nivell atòmic o molecular). En conseqüència, s'admet que no hi ha discontinuïtats entre les partícules i que la descripció matemàtica d'aquest medi i de les seves propietats es pot fer mitjançant funcions contínues.

1.2 Equacions del moviment

La descripció més elemental del moviment del medi continu es pot dur a terme mitjançant funcions matemàtiques que descriguin la posició de cada partícula al llarg del temps. En general, es requereix que aquestes funcions i les seves derivades siguin contínues.

Se suposa que el medi continu està format per infinites partícules (*punts materials*) que ocupen diferents posicions de l'espai físic durant el seu moviment al llarg del temps (vegeu la Figura 1-1). Es defineix com a *configuració* del medi continu en l'instant t , que es denota per Ω_t , el lloc geomètric de les posicions que ocupen a l'espai els punts materials (partícules) del medi continu en l'instant esmentat.

Definicions

Punt espacial: Punt fix a l'espai.

Punt material: Una partícula. Pot ocupar diferents punts espacials en el seu moviment al llarg del temps.

Configuració: Lloc geomètric de les posicions que ocupen a l'espai les partícules del medi continu per a un cert instant t .

NOTA

En general es prendrà l'instant $t_0 = 0$ com a instant de referència.

A un cert instant $t = t_0$ de l'interval de temps d'interès se'l denomina *instant de referència*, i a la configuració en l'instant esmentat Ω_0 se la denomina *configuració inicial, material o de referència*.

NOTACIÓ

S'utilitzaran indistintament les notacions (X, Y, Z) i (X_1, X_2, X_3) per designar el sistema de coordenades cartesianes.

NOTACIÓ

A la resta d'aquest text s'utilitzarà la *notació d'Einstein* o d'*índexs repetits*. Qualsevol repetició d'un índex en un mateix monomi d'una expressió algebraica suposa el sumatori respecte a l'índex esmentat. Exemples:

$$\sum_{i=1}^3 X_i \hat{e}_i = X_i \hat{e}_i \quad \text{not}$$

$$\sum_{k=1}^3 a_{ik} b_{kj} = a_{ik} b_{kj} \quad \text{not}$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} b_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad \text{not}$$

NOTACIÓ

Es distingeix aquí entre el vector (ens físic) \mathbf{X} i el seu vector de components $[\mathbf{X}]$.

Freqüentment s'obviarà aquesta distinció.

NOTACIÓ

Sempre que sigui possible, es denotaran amb lletres majúscules les variables que es refereixin a la configuració de referència Ω_0 i amb lletres minúscules les variables referides a la configuració actual Ω_t .

Considerem ara el sistema de coordenades cartesianes (X, Y, Z) de la Figura 1-1 i la base ortonormal corresponent $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. En la configuració de referència Ω_0 , el vector de posició \mathbf{X} d'una partícula que ocupa un punt P a l'espai (en l'instant de referència) ve donat per:

$$\mathbf{X} = X_1 \hat{e}_1 + X_2 \hat{e}_2 + X_3 \hat{e}_3 = X_i \hat{e}_i \quad (1.1)$$

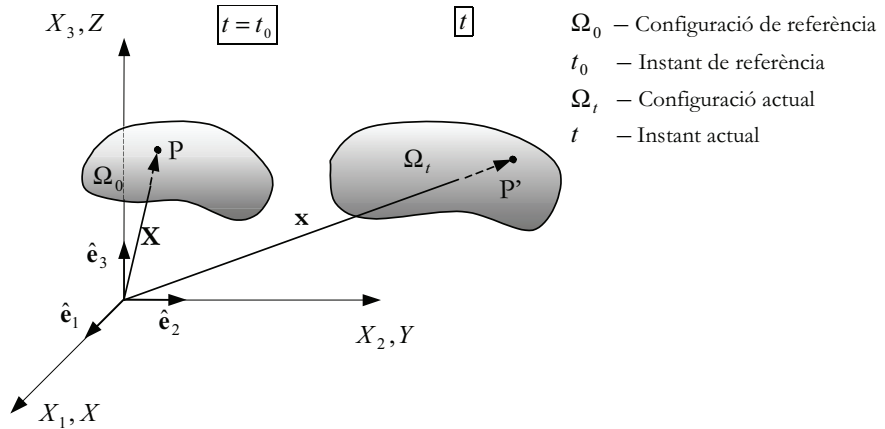


Figura 1-1 – Configuracions del medi continu

on als components (X_1, X_2, X_3) se'ls denomina *coordenades materials* (de la partícula).

$$[\mathbf{X}] = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{coordenades materials} \quad (1.2)$$

En la configuració actual Ω_t , la partícula situada originalment en el punt material P (vegeu la Figura 1-1) ocupa el punt espacial P', i el seu vector de posició \mathbf{x} ve donat per:

$$\mathbf{x} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 = x_i \hat{e}_i \quad (1.3)$$

on a (x_1, x_2, x_3) se les denomina *coordenades espacials* de la partícula en l'instant de temps t .

$$[\mathbf{x}] = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{coordenades espacials} \quad (1.4)$$

El moviment de les partícules del medi continu es pot descriure ara per l'evolució de les seves coordenades espacials (o del seu vector de posició) al llarg del temps. Matemàticament això requereix conèixer una funció que per a cada partícula (identificada per una *etiqueta*) proporcioni les seves coordenades espacials x_i (o el seu vector de posició espacial \mathbf{x}) en els instants de temps successius. Com a etiqueta que caracteritza unívocament cada partícula se'n poden escollir les coordenades materials X_i i obtenir les *equacions del moviment*:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \varphi(\text{partícula}, t) = \varphi(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{not}}{=} \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ x_i = \varphi_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.5)$$

que proporcionen les coordenades espacials en funció de les materials, i les *equacions del moviment inverses*:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{not}}{=} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \\ X_i = \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.6)$$

que proporcionen les coordenades materials en funció de les espacials.

NOTACIÓ

Amb un cert abús de la notació es confondrà freqüentment la funció amb la seva imatge. Així, les equacions de moviment s'escriuran sovint com
 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ i les seves
inverses com
 $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$.

Observació 1-1

Hi ha diferents alternatives per escollir l'etiqueta que caracteritza una partícula, encara que l'opció de prendre les seves coordenades materials és la més comuna. Quan les equacions del moviment vénen donades en funció de les coordenades materials com a etiqueta (com en l'equació (1.5)), es parlarà de les *equacions de moviment en forma canònica*.

Existeixen certes restriccions matemàtiques per garantir l'existència de φ i de φ^{-1} , com també el seu significat físic correcte. Aquestes restriccions són:

- $\varphi(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{X}$ ja que, per definició, \mathbf{X} és el vector de posició en l'instant de referència $t = 0$ (condició de consistència).
- $\varphi \in C^1$ (la funció φ és contínua i amb derivades contínues en cada punt i instant).
- φ és biunívoca (per garantir que dues partícules no ocupen simultàniament el mateix punt de l'espai i que una partícula no ocupa simultàniament dos punts diferents de l'espai).
- El jacobí de la transformació $J = \det \left[\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right] \stackrel{\text{not}}{=} \left| \frac{\partial \varphi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \right| > 0$.

La interpretació física d'aquesta condició (que s'estudiarà més endavant) és que qualsevol volum diferencial ha de ser sempre positiu o, utilitzant el *principi de conservació de la massa* (que es veurà més endavant), la densitat de les partícules ha de ser sempre positiva.

RECORDATORI

Es defineix l'operador de dos índexs Delta de

Kronecker $\overset{not}{=} \delta_{ij}$

com: $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$

El tensor unitat **1** de segon ordre es defineix llavors com $[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij}$

Observació 1-2

En l'instant de referència $t=0$ resulta $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)_{t=0} = \mathbf{X}$. En conseqüència $x = X$, $y = Y$, $z = Z$ són les equacions del moviment en l'instant de referència i el jacobià en l'instant esmentat és:

$$J(\mathbf{X}, 0) = \left| \frac{\partial(xyz)}{\partial(XYZ)} \right| = \det \left[\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right] = \det[\delta_{ij}] = \det \mathbf{1} = 1$$

Observació 1-3

L'expressió $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$, particularitzada per a un valor fix de les coordenades materials \mathbf{X} , proporciona l'equació de la *trajectòria* de la partícula (vegeu la Figura 1-2).

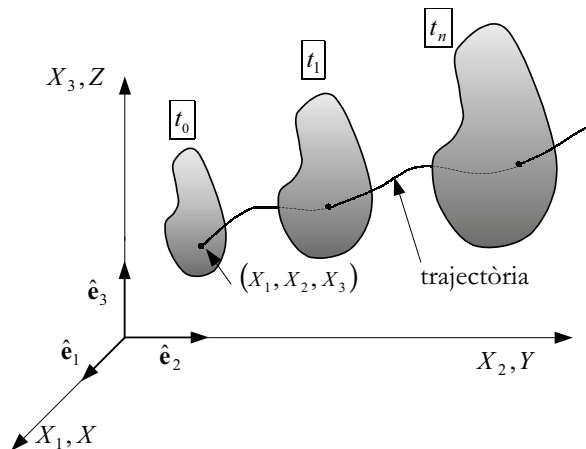


Figura 1-2 – Trajectòria d'una partícula

Exemple 1-1 – La descripció espacial del moviment d'un medi continu ve donada per:

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \equiv \begin{cases} x_1 = X_1 e^{2t} \\ x_2 = X_2 e^{-2t} \\ x_3 = 5 X_1 t + X_3 e^{2t} \end{cases} \equiv \begin{cases} x = X e^{2t} \\ y = Y e^{-2t} \\ z = 5 X t + Z e^{2t} \end{cases}$$

Obteniu les equacions del moviment inverses.

El determinant del jacobià resulta:

$$J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 5t & 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t} \neq 0$$

La condició suficient (però no necessària) perquè la funció $x = \varphi(\mathbf{X}, t)$ sigui biunívoca (que existeixi la inversa) és que el determinant del jacobià de la funció no sigui nul. A més, com que el jacobià és positiu, el moviment té sentit físic. Per tant, la inversa de la descripció espacial donada existeix i ve determinada per:

$$\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{-2t} \\ x_2 e^{2t} \\ x_3 e^{-2t} - 5tx_1 e^{-4t} \end{bmatrix}$$

1.3 Descripcions del moviment

La descripció matemàtica de les propietats de les partícules del medi continu es pot fer mitjançant dues formes alternatives: la descripció *material* (generalment utilitzada en mecànica de sòlids) i la descripció *espacial* (utilitzada generalment en mecànica de fluids). Totes dues descripcions es diferencien essencialment pel tipus d'argument (coordenades materials o coordenades espacials) que apareix en les funcions matemàtiques que descriuen les propietats del medi continu.

1.3.1 Descripció material

En la descripció material es descriu certa propietat (per exemple la densitat ρ) mitjançant certa funció $\bar{\rho}(\bullet, t): R^3 \times R^+ \rightarrow R^+$, on l'argument (\bullet) en $\bar{\rho}(\bullet, t)$ són les coordenades materials. És a dir:

$$\rho = \bar{\rho}(\mathbf{X}, t) = \bar{\rho}(X_1, X_2, X_3, t) \quad (1.7)$$

Observeu que si es fixen els tres arguments $\mathbf{X} \equiv (X_1, X_2, X_3)$ de l'equació (1.7) s'està seguint una partícula determinada (vegeu la Figura 1-3a), d'aquí prové la denominació de descripció material.

1.3.2 Descripció espacial

En la descripció espacial l'atenció se centra en un punt de l'espai. Es descriu la propietat com una funció $\rho(\bullet, t): R^3 \times R^+ \rightarrow R^+$ del punt de l'espai i del temps:

$$\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(x_1, x_2, x_3, t) \quad (1.8)$$

de manera que en assignar un cert valor a l'argument \mathbf{x} en $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$ s'obté l'evolució de la densitat per a les *diferents* partícules que van passant pel punt de l'espai esmentat al llarg del temps (vegeu la Figura 1-3b). D'altra banda, en fixar l'argument temps en l'equació (1.8) s'obté una distribució instantània (com una

NOTA

La bibliografia sobre el tema sol referir-se també a la descripció material com a *descripció lagrangeana*.

NOTA

Sol denominar-se també la descripció espacial com a *descripció euleriana*.

fotografia) de la propietat en l'espai. És evident que les equacions del moviment directes i inverses permeten passar d'una descripció a l'altra de la forma:

$$\begin{cases} \rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \bar{\rho}(\mathbf{X}, t) \\ \bar{\rho}(\mathbf{X}, t) = \bar{\rho}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \rho(\mathbf{x}, t) \end{cases} \quad (1.9)$$

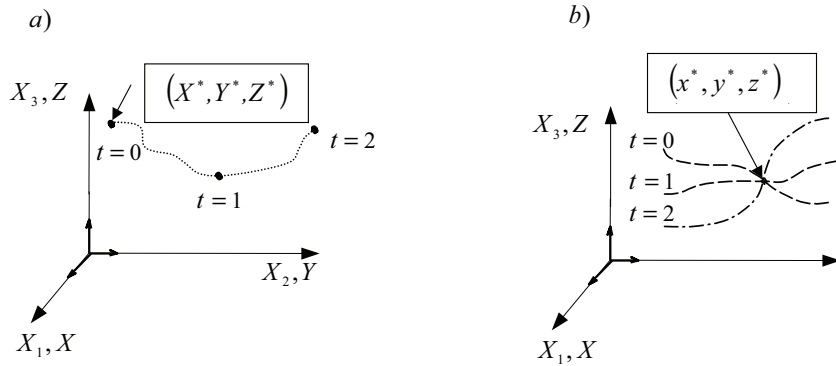


Figura 1-3 – Descripció material i espacial d'una propietat

Exemple 1-2 – *Siguin les següents equacions del moviment:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \equiv \begin{cases} x = X - Yt \\ y = Xt + Y \\ z = -Xt + Z \end{cases}$$

Obteniu la descripció espacial de la propietat descrita materialment mitjançant

$$\bar{\rho}(X, Y, Z, t) = \frac{X + Y + Z}{1 + t^2}$$

Les equacions del moviment estan donades en forma canònica, ja que a la

configuració de referència Ω_0 s'obté: $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\mathbf{X}, 0) = \begin{cases} x = X \\ y = Y \\ z = Z \end{cases}$

El jacobià resulta: $J = \left| \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial x}{\partial Z} \\ \frac{\partial y}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Z} \\ \frac{\partial z}{\partial X} & \frac{\partial z}{\partial Y} & \frac{\partial z}{\partial Z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -t & 0 \\ t & 1 & 0 \\ -t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + t^2 \neq 0$

i les equacions del moviment inverses estan donades per:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} X = \frac{x + yt}{1 + t^2} \\ Y = \frac{y - xt}{1 + t^2} \\ Z = \frac{z + zt^2 + xt + yt^2}{1 + t^2} \end{cases}$$

Si ara es considera la descripció material de la propietat $\bar{\rho}(X, Y, Z, t) = \frac{X + Y + Z}{1 + t^2}$ és possible trobar la seva descripció espacial substituint-hi les equacions del moviment inverses. És a dir:

$$\bar{\rho}(X, Y, Z, t) \equiv \frac{x + yt + y + z + zt^2 + yt^2}{(1 + t^2)^2} = \rho(x, y, z, t)$$

1.4 Derivades temporals: local, material, convectiva

La consideració de les diferents descripcions (material i espacial) de les propietats del medi continu porta a diverses definicions de les derivades temporals de les propietats esmentades. Considerem una certa propietat i les seves descripcions material i espacial:

$$\Gamma(\mathbf{X}, t) = \gamma(\mathbf{x}, t) \quad (1.10)$$

on el pas de la descripció espacial a la material i viceversa es fa a través de les equacions del moviment (1.5) i (1.6).

Definicions

Derivada local: Variació de la propietat respecte al temps en un punt fix de l'espai. Si es disposa de la *descripció espacial* de la propietat, $\gamma(\mathbf{x}, t)$, la derivada local esmentada es pot escriure matemàticament com:

$$\text{derivada local} = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t}$$

Derivada material: Variació de la propietat respecte al temps seguint una partícula (punt material) específica del medi continu. Si es disposa de la *descripció material* de la propietat, $\Gamma(\mathbf{X}, t)$, aquesta derivada material es pot descriure matemàticament com:

$$\text{derivada material} = \frac{d}{dt} \Gamma = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

NOTACIÓ

La notació $\frac{\partial(\bullet, t)}{\partial t}$

s'entén en el sentit clàssic de derivada parcial respecte a la variable t .

Tanmateix, si es parteix de la descripció espacial de la propietat $\gamma(\mathbf{x}, t)$ i s'hi consideren implícites les equacions del moviment:

$$\gamma(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \Gamma(\mathbf{X}, t) \quad (1.11)$$

es pot obtenir la derivada material (seguint una partícula) *a partir de la descripció espacial*, com:

$$\text{derivada material} = \frac{d}{dt} \gamma(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial \Gamma(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (1.12)$$

Desenvolupant l'equació (1.12) s'obté:

$$\frac{d\gamma(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}{dt} = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \gamma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial \mathbf{x}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}}_{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)} \quad (1.13)$$

on s'ha considerat la definició de la velocitat com la derivada respecte al temps de les equacions de moviment (1.5)

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.14)$$

L'obtenció de la derivada material a partir de la descripció espacial es pot generalitzar per a qualsevol propietat $\chi(\mathbf{x}, t)$ (de caràcter escalar, vectorial o tensorial):

$$\underbrace{\frac{d\chi(\mathbf{x}, t)}{dt}}_{\text{derivada material}} = \underbrace{\frac{\partial \chi(\mathbf{x}, t)}{\partial t}}_{\text{derivada local}} + \underbrace{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \chi(\mathbf{x}, t)}_{\text{derivada convectiva}} \quad (1.15)$$

NOTACIÓ

En la literatura s'utilitza freqüentment la

notació $\frac{D(\bullet)}{Dt}$ com a

alternativa a $\frac{d(\bullet)}{dt}$.

NOTACIÓ

Es considera aquí la forma simbòlica de l'operador *Nabla*

espacial: $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{e}_i$

Observació 1-4

L'equació (1.15) defineix implícitament la *derivada convectiva* $\mathbf{v} \cdot \nabla(\bullet)$ com la diferència entre les derivades material i local de la propietat. El terme *convecció* s'aplica, en mecànica de medis continus, a fenòmens relacionats amb el transport de massa (o de partícules). Observeu que si no hi ha convecció ($\mathbf{v} = 0$) la derivada convectiva desapareix i les derivades local i material coincideixen.

Exemple 1-3 – Atesa la següent equació del moviment

$$\begin{cases} x = X + Yt + Zt \\ y = Y + 2Zt \\ z = Z + 3Xt \end{cases}$$

i la descripció espacial d'una propietat $\rho(\mathbf{x}, t) = 3x + 2y + 3t$, calculen-ne la derivada material.

La descripció material de la propietat s'obté reemplaçant les equacions del moviment en l'expressió espacial:

$$\bar{\rho}(X, Y, Z, t) = 3(X + Yt + Zt) + 2(Y + 2Zt) + 3t = 3X + 3Yt + 7Zt + 2Y + 3t$$

La derivada material es pot obtenir en primera instància com la derivada respecte al temps en la descripció material, és a dir:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = 3Y + 7Z + 3$$

Una altra alternativa per al càlcul de la derivada material és utilitzar el concepte de derivada material de la descripció espacial de la propietat:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 3 \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = (Y + Z, 2Z, 3X)^T \quad \nabla \rho = \{3, 2, 0\}^T$$

Reemplaçant en l'expressió de l'operador derivada material es té:

$$\frac{d\rho}{dt} = 3 + 3Y + 7Z$$

Observeu que les expressions de la derivada material de la propietat obtingudes a partir de la descripció material, $\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}$, o de la descripció espacial, $\frac{d\rho}{dt}$, coincideixen.

1.5 Velocitat i acceleració

Definició

Velocitat: Derivada temporal de les equacions del moviment.

La descripció material de la velocitat ve donada, en conseqüència, per:

$$\begin{cases} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ V_i(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.16)$$

i si es disposa de les equacions inverses del moviment $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ és possible obtenir la descripció espacial de la velocitat com:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \quad (1.17)$$

Definició

Acceleració: Derivada material del camp de velocitats.

Si es té la velocitat descrita en forma material, es pot trobar la descripció material de l'acceleració com:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ A_i(\mathbf{X}, t) &= \frac{\partial V_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (1.18)$$

i a través de les equacions inverses del moviment $\mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t)$, es pot passar a la descripció espacial $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t)$. Com a alternativa, si es disposa de la descripció espacial de la velocitat, es pot obtenir directament la descripció espacial de l'acceleració aplicant l'equació (1.15) per obtenir la derivada material de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (1.19)$$

Exemple 1-4 – Considerem un sòlid (vegeu la Figura 1-4) que gira amb velocitat angular ω constant i que té com a equació del moviment:

$$\begin{cases} x = R \sin(\omega t + \phi) \\ y = R \cos(\omega t + \phi) \end{cases}$$

Troben la velocitat i l'acceleració del moviment descrites en forma material i espacial.

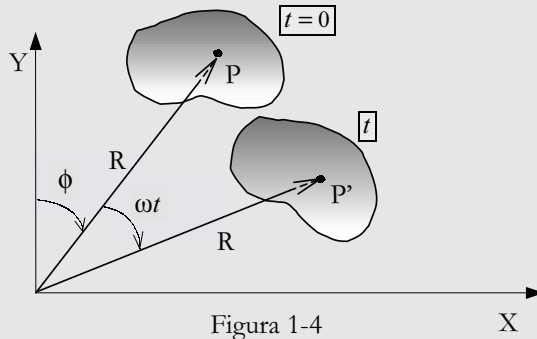


Figura 1-4

Les equacions del moviment es poden reescriure com:

$$\begin{aligned} x &= R \sin(\omega t + \phi) = R \sin(\omega t) \cos \phi + R \cos(\omega t) \sin \phi \\ y &= R \cos(\omega t + \phi) = R \cos(\omega t) \cos \phi - R \sin(\omega t) \sin \phi \end{aligned}$$

i, com que per a $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} X = R \sin \phi \\ Y = R \cos \phi \end{cases}$, les formes canòniques de l'equació del moviment i de la seva inversa queden:

$$\begin{cases} x = X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) \\ y = -X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \end{cases} \quad \begin{cases} X = x \cos(\omega t) - y \sin(\omega t) \\ Y = x \sin(\omega t) + y \cos(\omega t) \end{cases}$$

a.1) Velocitat en descripció material

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \equiv \begin{cases} V_x = \frac{\partial x}{\partial t} = -X \omega \sin(\omega t) + Y \omega \cos(\omega t) \\ V_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -X \omega \cos(\omega t) - Y \omega \sin(\omega t) \end{cases}$$

a.2) *Velocitat en descripció espacial*

Substituint els valors x i y donats en la forma canònica vista anteriorment, és possible obtenir la forma espacial de la velocitat com:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} v_x = \frac{\partial x}{\partial t} = \omega y \\ v_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega x \end{cases} = \begin{cases} \omega y \\ -\omega x \end{cases}$$

b.1) *Acceleració en descripció material*

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) = \begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial t} = -X\omega^2 \cos(\omega t) - Y\omega^2 \sin(\omega t) \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} = X\omega^2 \sin(\omega t) - Y\omega^2 \cos(\omega t) \end{cases} = -\omega^2 \begin{cases} X \cos(\omega t) + Y \sin(\omega t) \\ -X \sin(\omega t) + Y \cos(\omega t) \end{cases}$$

b.2) *Acceleració en descripció espacial*

Substituint les equacions del moviment inverses en l'equació anterior:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t), t) \equiv \begin{cases} a_x = -\omega^2 x \\ a_y = -\omega^2 y \end{cases}$$

Aquesta mateixa expressió es podria obtenir si es considera l'expressió de la velocitat $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i l'expressió de la derivada material en (1.15):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) &= \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \begin{cases} \omega y \\ -\omega x \end{cases} + [\omega y \quad -\omega x] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega y \\ -\omega x \end{bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + [\omega y \quad -\omega x] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\omega y) & \frac{\partial}{\partial x}(-\omega x) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\omega y) & \frac{\partial}{\partial y}(-\omega x) \end{bmatrix} = \begin{cases} -\omega^2 x \\ -\omega^2 y \end{cases} \end{aligned}$$

Observeu que el resultat obtingut pels dos procediments és idèntic.

1.6 Estacionarietat

Definició

Una propietat és *estacionària* quan la seva descripció espacial no depèn del temps.

D'acord amb la definició anterior i amb el concepte de derivada local, qualsevol propietat estacionària té la seva derivada local nul·la. Per exemple, si la velocitat per a un cert moviment és estacionària, es pot descriure espacialment com:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (1.20)$$

Observació 1-5

La independència del temps de la descripció espacial (estacionarietat) suposa que per a *un mateix punt de l'espai* la propietat en qüestió no varia al llarg del temps. Això no implica que, *per a una mateixa partícula*, la propietat no variï amb el temps (la descripció material pot dependre del temps). Per exemple, si la velocitat $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ és estacionària

$$\Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)) = \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$$

així doncs, la descripció material de la velocitat depèn del temps. Per a un cas de densitat estacionària (vegeu la Figura 1-5), per a dues partícules d'etiquetes \mathbf{X}_1 i \mathbf{X}_2 que varien la seva densitat al llarg del temps, en passar per un mateix punt espacial \mathbf{x} (en dos instants diferents t_1 i t_2) prendran el mateix valor de la densitat ($\bar{\rho}(\mathbf{X}_1, t_1) = \bar{\rho}(\mathbf{X}_2, t_2) = \rho(\mathbf{x})$). És a dir, per a un observador situat a l'exterior del medi, la densitat en el punt fix de l'espai \mathbf{x} serà sempre la mateixa.

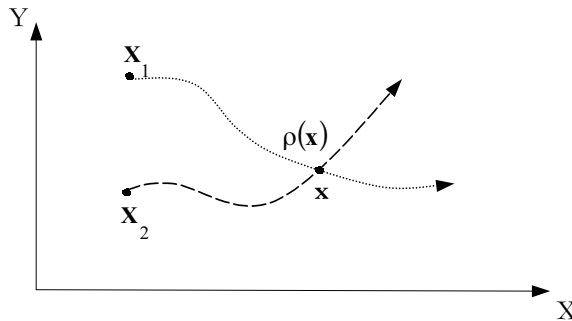


Figura 1-5 – Moviment amb densitat estacionària

Exemple 1-5 – En l'Exemple 1-4 es té un camp de velocitat la descripció espacial de la qual és: $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \equiv \begin{Bmatrix} \omega y \\ -\omega x \end{Bmatrix}$. És a dir, es tracta d'un cas en què la descripció espacial de la velocitat no depèn del temps i la velocitat és estacionària. És evident que això no implica que la velocitat de les partícules (que tenen un moviment de *rotació uniforme* respecte a l'origen, amb velocitat angular ω) no depengui del temps (vegeu la Figura 1-6). La direcció del vector velocitat per a una mateixa partícula és tangent a la seva trajectòria circular i va variant al llarg del temps.

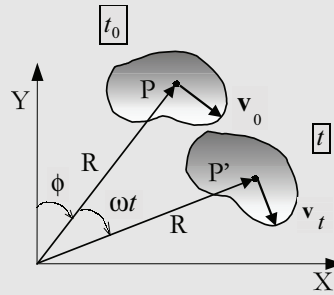


Figura 1-6

L'acceleració (derivada material de la velocitat) apareix pel canvi de la direcció del vector velocitat de les partícules i és coneguda com a acceleració *centrípeta*:

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial t} + \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

1.7 Trajectòria

Definició

Trajectòria: Lloc geomètric de les posicions que ocupa una partícula a l'espai al llarg del temps.

L'equació paramètrica en funció del temps d'una trajectòria s'obté particularitzant les equacions del moviment per a una determinada partícula (identificada per les seves coordenades materials \mathbf{X}^* , vegeu la Figura 1-7):

$$\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t) \Big|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*} \quad (1.21)$$

Ateses les equacions del moviment $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{X}, t)$, per cada punt de l'espai passa una trajectòria caracteritzada pel valor de l'etiqueta (coordenades materials) \mathbf{X} . Les equacions del moviment defineixen llavors una família de corbes els elements de les quals són les trajectòries de les diverses partícules.

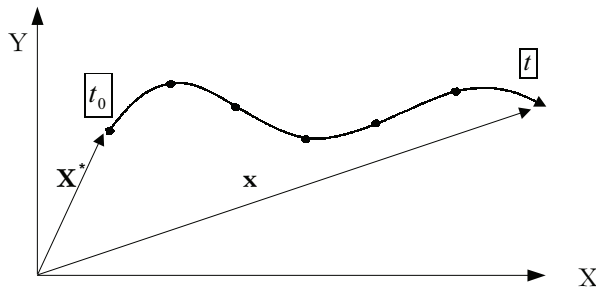


Figura 1-7 – Trajectòria d'una partícula

1.7.1 Equació diferencial de les trajectòries

Donat el camp de velocitats en descripció espacial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, és possible obtenir la família de trajectòries plantejant el sistema d'equacions diferencials que imposa que, en cada punt de l'espai \mathbf{x} , el vector velocitat sigui la derivada respecte al temps de l'equació paramètrica de les trajectòries donada per l'equació (1.21).

$$\text{Trobar } \mathbf{x}(t) := \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(t), t) \\ \frac{dx_i(t)}{dt} = v_i(\mathbf{x}(t), t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.22)$$

La solució del sistema d'equacions diferencials de primer ordre (1.22) dependrà de tres constants d'integració (C_1, C_2, C_3) :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(C_1, C_2, C_3, t) \\ x_i = \phi_i(C_1, C_2, C_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.23)$$

Les expressions (1.23) constitueixen una família de corbes a l'espai parametritzada per les constants (C_1, C_2, C_3) . Assignant un valor determinat a les constants esmentades s'obté un membre de la família que és la trajectòria d'una partícula caracteritzada per l'etiqueta (C_1, C_2, C_3) .

Per obtenir les equacions en forma canònica s'imposa la condició de consistència en la configuració de referència:

$$\mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{X} = \phi(C_1, C_2, C_3, 0) \Rightarrow C_i = \chi_i(\mathbf{X}) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (1.24)$$

i substituint en l'equació (1.23) s'obté la forma canònica de l'equació de les trajectòries:

$$\mathbf{x} = \phi(C_1(\mathbf{X}), C_2(\mathbf{X}), C_3(\mathbf{X}), t) = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (1.25)$$

Exemple 1-6 – Considerem el camp de velocitats de l'Exemple 1-5:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \omega y \\ -\omega x \end{Bmatrix}$$

Obteniu l'equació de les trajectòries.

Utilitzant l'expressió (1.22), es pot escriure:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = v_x(\mathbf{x}, t) = \omega y \\ \frac{dy(t)}{dt} = v_y(\mathbf{x}, t) = -\omega x \end{cases}$$

El sistema anterior d'equacions diferencials és un sistema de variables creuades. Si es deriva la segona equació i se substitueix el resultat en la primera s'obté:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = -\omega \frac{dx(t)}{dt} = -\omega^2 y(t) \Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0$$

Equació característica: $r^2 + \omega^2 = 0$

Solucions característiques: $r_j = \pm i \omega \quad j \in \{1, 2\}$

Solució: $y(t) = \text{Part Real} \{C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\} = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$

La solució per a $x(t)$ s'obté a partir de $\frac{dy}{dt} = -\omega x$ que resulta en $x = -\frac{1}{\omega} \frac{dy}{dt}$, i s'obté així:

$$\begin{cases} x(C_1, C_2, t) = C_1 \sin(\omega t) - C_2 \cos(\omega t) \\ y(C_1, C_2, t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) \end{cases}$$

Les equacions anteriors proporcionen les expressions de les trajectòries en forma no canònica. La forma canònica s'obté considerant la condició inicial:

$$\mathbf{x}(C_1, C_2, 0) = \mathbf{X}$$

és a dir:

$$\begin{cases} x(C_1, C_2, 0) = -C_2 = X \\ y(C_1, C_2, 0) = C_1 = Y \end{cases}$$

Així, les equacions del moviment, o equació de les trajectòries, en forma canònica són:

$$\begin{cases} x = Y \sin(\omega t) + X \cos(\omega t) \\ y = Y \cos(\omega t) - X \sin(\omega t) \end{cases}$$

1.8 Línia de corrent

NOTA

Donat un camp vectorial es defineixen les seves envolupants com la família de corbes el vector tangent de les quals, en cada punt, coincideix en direcció i sentit amb el vector corresponent del camp vectorial.

Definició

Línies de corrent: Família de corbes que, per a cada instant de temps, són les envolupants del camp de velocitats.

D'acord amb la seva definició, la tangent en cada punt d'una línia de corrent té la mateixa direcció i sentit (encara que no necessàriament la mateixa magnitud) que el vector de velocitat en el punt.

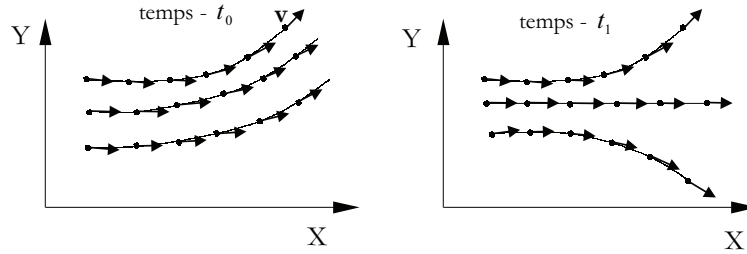


Figura 1-8 – Línies de corrent

Observació 1-6

En el cas més general el camp de velocitats (descripció espacial) serà diferent per a cada instant de temps ($\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$). Caldrà parlar, en conseqüència, d'una família diferent de línies de corrent per a cada instant de temps (vegeu la Figura 1-8).

1.8.1 Equació diferencial de les línies de corrent

Considereu un instant de temps donat t^* i la descripció espacial del camp de velocitats en l'instant esmentat $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t^*)$. Sigui $\mathbf{x}(\lambda)$ l'equació d'una línia de corrent parametritzada en funció d'un cert paràmetre λ . El vector tangent a la línia de corrent queda definit, per a cada valor de λ per $\frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda}$ i la condició de tangència del camp de velocitats es pot escriure com:

$$\text{Trobar } \mathbf{x}(\lambda) := \begin{cases} \frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda} = \mathbf{v}(\mathbf{x}(\lambda), t^*) \\ \frac{dx_i(\lambda)}{d\lambda} = v_i(\mathbf{x}(\lambda), t^*) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (1.26)$$

Les equacions (1.26) constitueixen un sistema d'equacions diferencials de primer ordre la solució del qual per a cada instant de temps t^* , que dependrà de tres constants d'integració (C'_1, C'_2, C'_3), proporciona l'expressió paramètrica de les línies de corrent:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(C'_1, C'_2, C'_3, \lambda, t^*) \\ x_i = \phi_i(C'_1, C'_2, C'_3, \lambda, t^*) \end{cases} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (1.27)$$

Cada tripleta de constants d'integració (C'_1, C'_2, C'_3) identifica una línia de corrent de la qual s'obtenen els punts, al seu torn, assignant valors al paràmetre λ . Per a cada instant de temps t^* s'obté una nova família de línies de corrent.

NOTA

Se suposa que el valor del paràmetre λ es tria de forma que en cada punt \mathbf{x} de l'espai,

$\frac{d\mathbf{x}(\lambda)}{d\lambda}$ no només té la

direcció del vector $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, sinó que hi coincideix.

Observació 1-7

Si es té un camp de velocitats estacionari ($\Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x})$), les *trajectòries i línies de corrent coincideixen*. La justificació d'aquest fet es pot fer des de dues òptiques diferents:

- La no-aparició del temps al camp de velocitats en les equacions (1.22) i (1.26) motiva que les equacions diferencials que defineixen les trajectòries i les que defineixen les línies de corrent només difereixin en la *denominació* del paràmetre d'integració (t o λ respectivament). La solució de tots dos sistemes ha de ser, per tant, la mateixa, llevat pel *nom* del paràmetre utilitzat en els dos tipus de corbes.
- Des d'un punt de vista més físic: a) Si el camp de velocitats és estacionari les seves envelopants (les línies de corrent) no varien amb el temps; b) una partícula determinada recorre l'espai mantenint la trajectòria en la direcció tangent al camp de velocitats que va trobant al llarg del temps; c) per tant, si una trajectòria comença en un punt de certa línia de corrent, es manté sobre aquesta al llarg del temps.

1.9 Tub de corrent

Definició

Tub de corrent: Superfície constituïda per un feix de línies de corrent que passen pels punts d'una línia tancada, fixa a l'espai i que *no* constitueix una línia de corrent.

En casos no estacionaris, malgrat que la línia tancada no varia, el tub de corrent i les línies de corrent sí que ho fan. Al contrari, per al cas estacionari el tub de corrent roman fix a l'espai al llarg del temps.

1.9.1 Equació del tub de corrent

Les línies de corrent constitueixen una família de corbes del tipus:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(C_1, C_2, C_3, \lambda, t) \quad (1.28)$$

El problema consisteix a determinar per a cada instant de temps quines corbes de la família de corbes de les línies de corrent passen per una línia tancada i fixa a l'espai Γ , del qual l'expressió matemàtica parametritzada en funció d'un paràmetre s és:

$$\Gamma := \mathbf{x} = \mathbf{g}(s) \quad (1.29)$$

Per a això s'imposa la condició de pertinença d'un mateix punt a les dues corbes, en termes dels paràmetres λ^* i s^* :

$$\mathbf{g}(s^*) = \mathbf{f}(C_1, C_2, C_3, \lambda^*, t) \quad (1.30)$$

Amb això s'obté un sistema de tres equacions del qual es pot aïllar, per exemple, s^*, λ^*, C_3 , és a dir:

$$\begin{aligned} s^* &= s^*(C_1, C_2, t) \\ \lambda^* &= \lambda^*(C_1, C_2, t) \\ C_3 &= C_3(C_1, C_2, t) \end{aligned} \quad (1.31)$$

Substituint (1.31) en (1.30) s'obté:

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(C_1, C_2, C_3(C_1, C_2, t), \lambda(C_1, C_2, t), t) = \mathbf{h}(C_1, C_2, t) \quad (1.32)$$

que constitueix l'expressió parametritzada (en funció dels paràmetres C_1, C_2) del tub de corrent, per a cada instant t (vegeu la Figura 1-9).

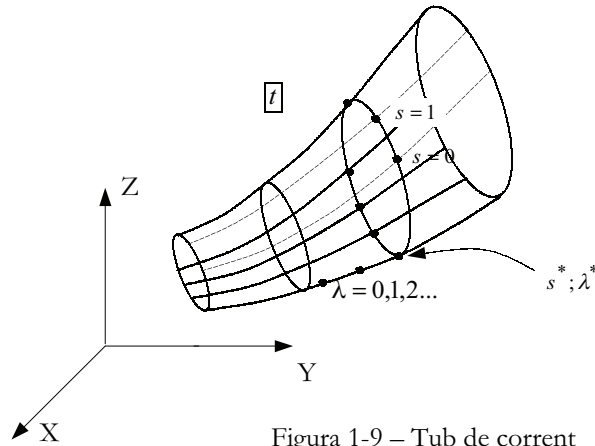


Figura 1-9 – Tub de corrent

1.10 Línia de traça

Definició

Línia de traça, relativa a un punt fix a l'espai \mathbf{x}^* denominat *punt d'abocament* i a un interval de temps denominat *temps d'abocament* $[t_i, t_f]$, és el lloc geomètric de les posicions que ocupen en un instant t , totes les partícules que han passat per \mathbf{x}^* en un instant $\tau \in [t_i, t] \cap [t, t_f]$.

La definició anterior correspon al concepte físic de la línia de color (traça) que s'observaria en el medi en l'instant t , si s'aboqués un colorant en el punt d'abocament \mathbf{x}^* durant l'interval de temps $[t_i, t_f]$ (vegeu la Figura 1-10).

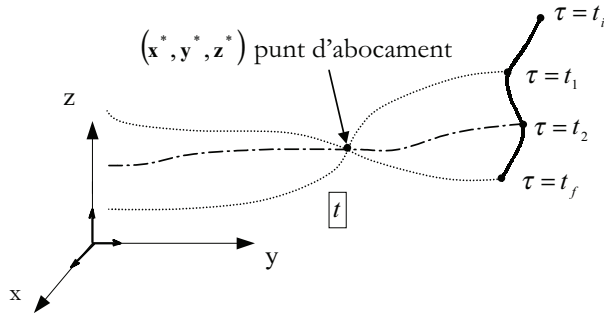


Figura 1-10 – Línia de traça

1.10.1 Equació de la línia de traça

Per determinar l'equació de la línia de traça és necessari identificar les partícules que passen pel punt \mathbf{x}^* en els instants corresponents τ . A partir de les equacions del moviment donades per (1.5) i (1.6) es tracta de determinar quina és l'etiqueta de la partícula que en l'instant de temps τ passa pel punt d'abocament. Per a això es planteja:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}(\mathbf{X}, \tau) \\ x_i^* &= x_i(\mathbf{X}, \tau) \quad i \in 1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{f}(\tau) \quad (1.33)$$

Substituint (1.33) en les equacions del moviment (1.5) s'obté:

$$\mathbf{x} = \varphi(\mathbf{f}(\tau), t) = \mathbf{g}(\tau, t) \quad \tau \in [t_i, t] \cap [t, t_f] \quad (1.34)$$

L'expressió (1.34) constitueix, per a cada instant t , l'expressió paramètrica (en termes del paràmetre τ) d'un segment curvilini a l'espai que és la línia de traça en l'instant esmentat.

Exemple 1-7 – Sigui un moviment definit per les equacions del moviment següents:

$$x = (X + Y)t^2 + X \cos t$$

$$y = (X + Y) \cos t - X$$

Obteniu l'equació de la línia de traça associada al punt d'abocament $\mathbf{x}^* = (0, 1)$ per al període d'abocament $[t_0, +\infty)$.

Les coordenades materials de la partícula que han passat pel punt d'abocament en l'instant τ estan donades per:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (X + Y)\tau^2 + X \cos \tau \\ 1 &= (X + Y) \cos \tau - X \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} X = \frac{-\tau^2}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \\ Y = \frac{\tau^2 + \cos \tau}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \end{cases}$$

Per tant, l'etiqueta de les partícules que han passat pel punt d'abocament des de l'instant d'inici d'abocament t_0 fins a l'instant actual t queda definida per:

$$\left. \begin{aligned} X &= \frac{-\tau^2}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \\ Y &= \frac{\tau^2 + \cos \tau}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \end{aligned} \right\} \tau \in [t_0, t] \cap [t_0, \infty] = [t_0, t]$$

D'aquí, substituint en les equacions del moviment, s'obtenen les equacions de la línia de traça:

$$\mathbf{x} = \mathbf{g}(\tau, t) \equiv \begin{cases} x = \frac{\cos \tau}{\tau^2 + \cos^2 \tau} t^2 + \frac{-\tau^2}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \cos t \\ y = \frac{\cos \tau}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \cos t - \frac{-\tau^2}{\tau^2 + \cos^2 \tau} \end{cases} \quad \tau \in [t_0, t]$$

Observació 1-8

En un problema *estacionari* les línies de traça són segments de les trajectòries (o de les línies de corrent). La justificació es basa en el fet que en el cas estacionari la trajectòria segueix l'envolupant del camp de velocitats que roman constant amb el temps. Si es considera un punt d'abocament, \mathbf{x}^* , totes les partícules que passen per aquest punt seguiran porcions (segments) de la mateixa trajectòria.

1.11 Superfície material

Definició

Superfície material: Superfície mòbil a l'espai constituïda sempre per les mateixes partícules (punts materials).

En la configuració de referència Ω_0 la superfície Σ_0 es podrà definir en termes d'una funció de les coordenades materials $F(X, Y, Z)$ com:

$$\Sigma_0 := \{X, Y, Z \mid F(X, Y, Z) = 0\} \quad (1.35)$$

Observació 1-9

La funció $F(X, Y, Z)$ no depèn del temps, cosa que garanteix que les partícules, identificades per la seva etiqueta, que compleixen l'equació $F(X, Y, Z) = 0$ són sempre les mateixes d'acord amb la definició de superfície material.

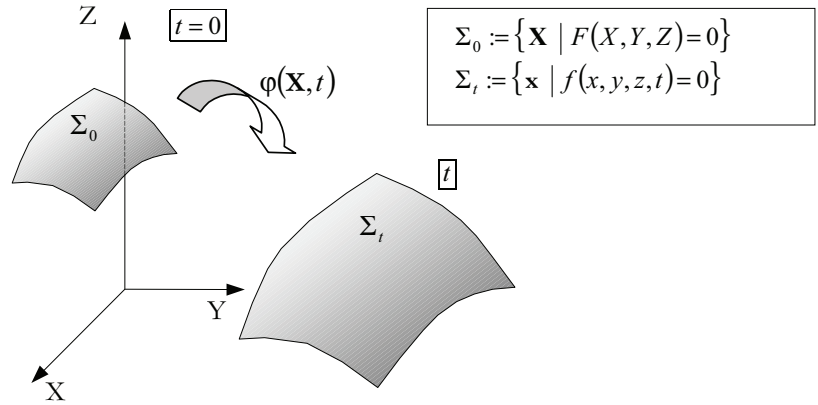


Figura 1-11 – Superfície material

La descripció espacial de la superfície s'obindrà a partir de la descripció espacial de $F(\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) = f(x, y, z, t)$:

$$\Sigma_t := \{x, y, z \mid f(x, y, z, t) = 0\} \quad (1.36)$$

Observació 1-10

La funció $f(x, y, z, t)$ depèn explícitament del temps, cosa que estableix que els *punts de l'espai* que estaran sobre la superfície varien amb el temps. Aquesta dependència del temps de la descripció espacial de la superfície li confereix el seu caràcter de superfície mòbil en l'espai (vegeu la Figura 1-11).

Observació 1-11

Condicció necessària i suficient perquè una superfície mòbil a l'espai, definida implícitament per una funció $f(x, y, z, t) = 0$, sigui material (estigui constituïda sempre per les mateixes partícules) és que la *derivada material* de $f(x, y, z, t)$ sigui nul·la:

$$\frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Sigma_t \quad \forall t$$

La condició és *necessària* ja que si la superfície és material, la seva descripció material no depèn del temps ($F \equiv F(\mathbf{X})$) i, per tant, la seva descripció espacial té derivada material nul·la. La condició de *suficiència* es fonamenta en què, si la derivada material de $f(\mathbf{x}, t)$ és nul·la, la descripció material corresponent no depèn del temps ($F \equiv F(\mathbf{X})$) i, per tant, el conjunt de partícules (identificades per les seves coordenades materials) que compleixen la condició $F(\mathbf{X}) = 0$ és sempre el mateix.

Exemple 1-8 – En la teoria d'onatge s'imposa la condició que la superfície lliure del fluid que està en contacte amb l'atmosfera sigui una superfície material. És a dir, aquesta restricció suposa que la superfície lliure està formada sempre per les mateixes partícules (hipòtesi raonable, sobretot en aigües profundes).

Si se suposa que $z = \eta(x, y, t)$ defineix l'altura de la superfície del mar respecte a un nivell de referència, la superfície lliure de l'aigua vindrà definida per:

$$f(x, y, z, t) \equiv z - \eta(x, y, t) = 0.$$

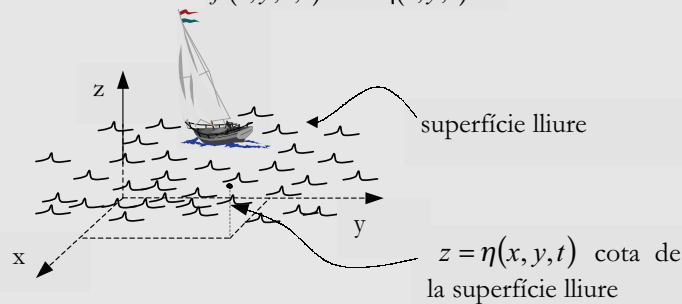


Figura 1-12

La condició $\frac{df}{dt} = 0$ s'escriu com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{\partial \eta}{\partial t} \\ \mathbf{v} \cdot \nabla f &= \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{df}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f = -\frac{\partial \eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} - v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} + v_z = 0 \Rightarrow \\ v_z &= \frac{\partial \eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned}$$

És a dir, la condició de superfície material es tradueix en una condició sobre el component vertical del camp de velocitats.

1.12 Superfície de control

Definició

Superfície de control: Superfície fixa a l'espai.

La seva descripció matemàtica ve donada per:

$$\Sigma := \{ \mathbf{x} \mid f(x, y, z) = 0 \} \quad (1.37)$$

És evident que una superfície de control és travessada per les diferents partícules del medi continu al llarg del temps (vegeu la Figura 1-13)

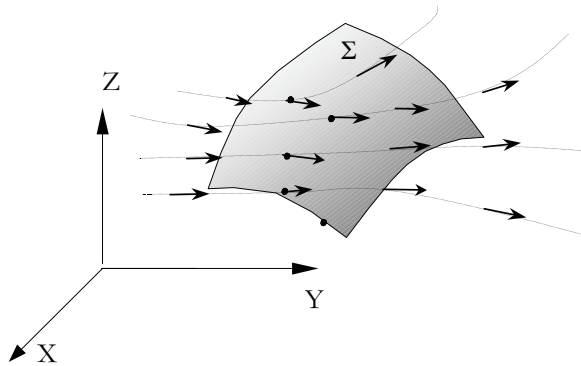


Figura 1-13 – Superfície de control

1.13 Volum material

Definició

Volum material: Volum limitat per una superfície material tancada.

NOTA

S'entén la funció $F(\mathbf{X})$ definida de manera que $F(\mathbf{X}) < 0$ correspon a punts de l'interior de V_0

La descripció matemàtica del volum material V (vegeu la Figura 1-14) ve donada per:

$$V_0 := \{ \mathbf{X} \mid F(\mathbf{X}) \leq 0 \} \quad (1.38)$$

en la descripció material, i per:

$$V_t := \{ \mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}, t) \leq 0 \} \quad (1.39)$$

en la descripció espacial, sent $F(\mathbf{X}) = f(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$ la funció que descriu la superfície material que el tanca.

Observació 1-12

Un volum material està constituït sempre per les mateixes partícules. La justificació es fa per reducció a l'absurd: si una certa partícula pogués entrar o sortir del volum material s'incorporaria en el seu moviment a la superfície material (almenys per un instant de temps). Això seria contrari al fet que la superfície, per ser material, està formada sempre per les mateixes partícules.

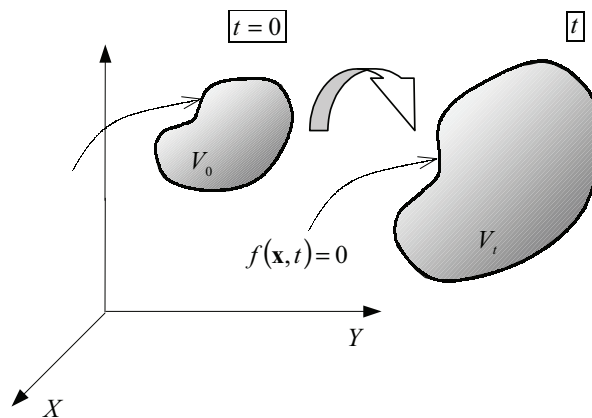


Figura 1-14 – Volum material

1.14 Volum de control

Definició

Volum de control: Conjunt de punts de l'espai situats a l'interior d'una superfície de control tancada.

NOTA

S'entén la funció $f(\mathbf{x})$ definida de manera que $f(\mathbf{x}) < 0$ correspon a punts de l'interior de V .

Es tracta d'un volum fix a l'espai que és travessat per les partícules del medi durant el seu moviment. La seva descripció matemàtica és:

$$V := \{ \mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \leq 0 \} \quad (1.40)$$

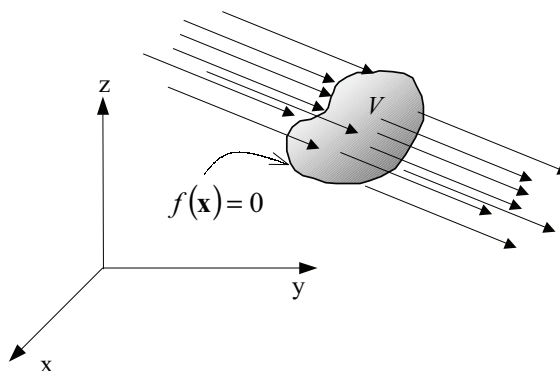


Figura 1-15 – Volum de control

2 Descripció de la deformació

2.1 Introducció

Definició

Deformació: en el context més general, el concepte *deformació* es refereix a l'estudi no ja del moviment absolut de les partícules tal com es va fer en el capítol 1, sinó del *moviment relatiu*, respecte a una partícula determinada, de les partícules situades en un entorn diferencial d'aquella.

2.2 Tensor gradient de deformació

Considerem en el medi continu en moviment de la Figura 2-1 una partícula P en la configuració de referència Ω_0 , que ocupa el punt de l'espai P' en la configuració actual Ω_t , i una partícula Q situada en un entorn diferencial de P , amb posicions relatives en els instants de referència i actual donades per $d\mathbf{X}$ i $d\mathbf{x}$, respectivament.

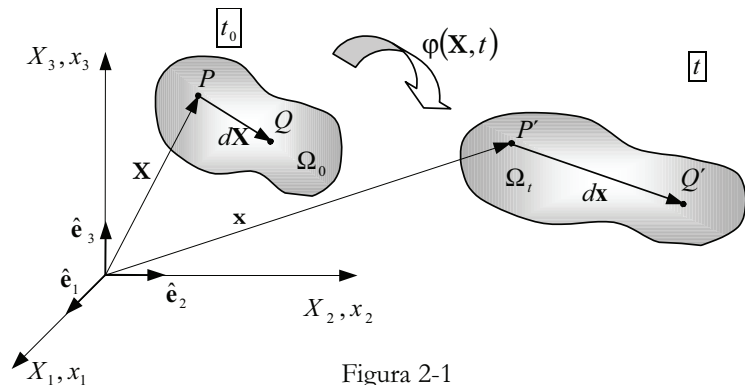


Figura 2-1

Siguin

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \\ x_i = \phi_i(X_1, X_2, X_3, t) = x_i(X_1, X_2, X_3, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.1)$$

les equacions del moviment. Diferenciant (2.1) respecte a les coordenades materials \mathbf{X} resulta:

$$\begin{array}{l} \text{Equació fonamental} \\ \text{de la deformació} \end{array} \rightarrow \begin{cases} dx_i = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}} dX_j & i, j \in \{1, 2, 3\} \\ d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \end{cases} \quad (2.2)$$

NOTACIÓ

Es considera aquí la forma simbòlica de l'operador nabla material:

$$\bar{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial X_i} \hat{\mathbf{e}}_i$$

aplicada a l'expressió del producte tensorial o obert:

$$\begin{aligned} [\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}]_{ij} &\stackrel{not}{=} [\mathbf{a} \mathbf{b}]_{ij} = \\ &= a_i b_j \end{aligned}$$

L'equació (2.2) defineix el tensor *gradient material de la deformació* $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor gradient material} \\ \text{de la deformació} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{F} \stackrel{not}{=} \mathbf{x} \otimes \bar{\nabla} \\ F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} & i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.3)$$

Els components explícits del tensor \mathbf{F} vénen donats per:

$$[\mathbf{F}] = [\mathbf{x} \otimes \bar{\nabla}] = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \mathbf{x} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix}}_{\bar{\nabla}^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Observació 2-1

El *tensor gradient de la deformació* $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ conté la informació del moviment relatiu, al llarg del temps t , de totes les partícules materials en l'entorn diferencial d'una d'elles, identificada per les seves coordenades materials \mathbf{X} . Efectivament, l'equació (2.2) proporciona l'evolució del vector de posició relatiu $d\mathbf{x}$ en funció de la posició relativa $d\mathbf{X}$ corresponent en l'instant de referència. En aquest sentit, si es coneix el valor de $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ es disposa de la informació associada al concepte general de deformació definida a la secció 2.1

2.2.1 Tensor gradient de la deformació invers

Considerant ara les equacions de moviment inverses:

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \varphi^{-1}(\mathbf{x}, t) \stackrel{not}{=} \mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \\ X_i = \varphi_i^{-1}(x_1, x_2, x_3, t) \stackrel{not}{=} X_i(x_1, x_2, x_3, t) & i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.5)$$

i diferenciant (2.5) respecte a les coordenades espacials x_i , resulta:

$$\begin{cases} dX_i = \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{F^{-1}_{ij}} dx_j & i, j \in \{1, 2, 3\} \\ d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.6)$$

El tensor definit per l'equació (2.6) s'anomena tensor *gradient espacial de la deformació* o tensor *gradient (material) de la deformació invers* i ve caracteritzat per:

NOTACIÓ
Es considera aquí la forma simbòlica de l'operador *nabla espacial*

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i.$$

Cal observar la diferència de notació entre l'esmentat operador espacial (∇) i l'operador *nabla material* ($\bar{\nabla}$).

$$\text{Tensor gradient espacial de la deformació} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X} \otimes \nabla \\ F_{ij}^{-1} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} & i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.7)$$

Els components explícits del tensor \mathbf{F}^{-1} vénen donats per:

$$[\mathbf{F}^{-1}] = [\mathbf{X} \otimes \nabla] = \underbrace{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}}_{[\mathbf{X}]} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}}_{[\nabla]^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} & \frac{\partial X_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} & \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial x_1} & \frac{\partial X_3}{\partial x_2} & \frac{\partial X_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

RECORDATORI

Es defineix l'operador de dos índexs *delta de Kronecker* δ_{ij} com:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

El tensor unitat de 2n ordre $\mathbf{1}$ ve definit per:

$$[\mathbf{1}]_{ij} = \delta_{ij}.$$

Observació 2-2

El tensor gradient espacial de la deformació, denotat a (2.6) i (2.7) mitjançant \mathbf{F}^{-1} , és efectivament l'invers del tensor gradient (material) de la deformació \mathbf{F} . La comprovació és immediata atès que:

$$\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_k}}_{F^{-1}_{ik}} \underbrace{\frac{\partial X_k}{\partial x_j}}_{F_{kj}} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} \Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1}$$

$$\underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_k}}_{F_{ik}} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_j}}_{F^{-1}_{kj}} = \frac{\partial X_i}{\partial X_j} = \delta_{ij} \Rightarrow \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{1}$$

Exemple 2-1 – Per a un determinat instant, el moviment d'un medi continu ve definit per:

$$x_1 = X_1 - AX_3, \quad x_2 = X_2 - AX_3, \quad x_3 = -AX_1 + AX_2 + X_3.$$

Obteniu el tensor gradient material de la deformació $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ en l'instant esmentat. A partir de les equacions de moviment inverses, obteniu el tensor gradient espacial de la deformació $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x})$. Amb els resultats obtinguts, proveu que $\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1}$.

a) Tensor gradient material de la deformació.

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \otimes \bar{\nabla} \equiv [\mathbf{x}] \cdot [\bar{\nabla}]^T = \begin{bmatrix} X_1 - AX_3 \\ X_2 - AX_3 \\ -AX_1 + AX_2 + X_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial X_1}, \frac{\partial}{\partial X_2}, \frac{\partial}{\partial X_3} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix}$$

b) *Equacions de moviment inverses:* De la inversió algebraica de les equacions de moviment s'obté:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{cases} X_1 = (1 + A^2)x_1 - A^2x_2 + Ax_3 \\ X_2 = A^2x_1 + (1 - A^2)x_2 + Ax_3 \\ X_3 = Ax_1 - Ax_2 + x_3 \end{cases}$$

c) *Tensor gradient espacial de la deformació:*

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{X} \otimes \nabla \equiv [\mathbf{X}] \cdot [\nabla]^T = \begin{bmatrix} (1 + A^2)x_1 - A^2x_2 + Ax_3 \\ A^2x_1 + (1 - A^2)x_2 + Ax_3 \\ Ax_1 - Ax_2 + x_3 \end{bmatrix} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1 - A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix}$$

d) *Comprovació:*

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 + A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1 - A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{1}$$

2.3 Desplaçaments

Definició

Desplaçament: diferència entre els vectors de posició d'una mateixa partícula en les configuracions actual i de referència.

El desplaçament d'una partícula P en un instant determinat ve definit pel vector \mathbf{u} que uneix els punts de l'espai P (posició inicial) i P' (posició en l'instant actual t) de la partícula (vegeu la Figura 2-2). El desplaçament de totes les partícules del medi continu defineix el *camp vectorial de desplaçaments* que, com tota propietat del medi continu, es podrà descriure en forma material $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ o espacial, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \\ U_i(\mathbf{X}, t) = x_i(\mathbf{X}, t) - X_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}(x, t) \\ u_i(\mathbf{x}, t) = x_i - X_i(\mathbf{x}, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.10)$$

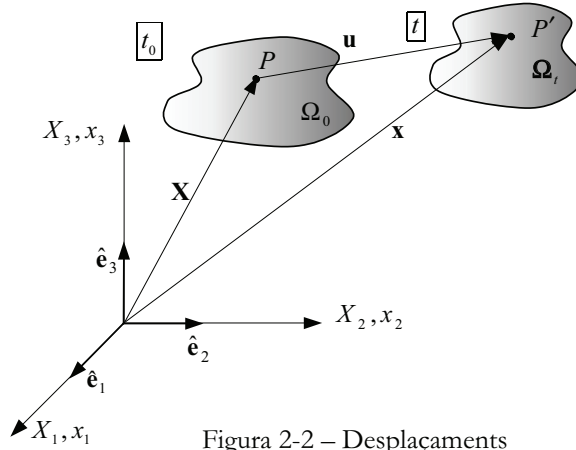


Figura 2-2 – Desplaçaments

2.3.1 Tensors gradient material i espacial dels desplaçaments

La derivació del vector desplaçament U_i en l'equació (2.9) respecte a les coordenades materials porta a:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial X_j}}_{F_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial X_j}}_{\delta_{ij}} = F_{ij} - \delta_{ij} \stackrel{def}{=} J_{ij} \quad (2.11)$$

que defineix el *tensor gradient material dels desplaçaments* com:

Tensor gradient material dels desplaçaments	$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) \stackrel{def}{=} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \otimes \bar{\nabla} = \mathbf{F} - \mathbf{1} \\ J_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = F_{ij} - \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$	(2.12)
---	--	--------

$$\begin{cases} dU_i = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} dX_j = J_{ij} dX_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \\ d\mathbf{U} = \mathbf{J} \cdot d\mathbf{X} \end{cases} \quad (2.13)$$

De la mateixa manera, diferenciant l'expressió de u_i en l'equació (2.10), respecte a les coordenades espacials s'obté:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_j}}_{\delta_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial X_i}{\partial x_j}}_{F_{ij}^{-1}} = \delta_{ij} - F_{ij}^{-1} \stackrel{def}{=} j_{ij} \quad (2.14)$$

que defineix el *tensor gradient espacial dels desplaçaments* com:

Tensor gradient espacial dels desplaçaments	$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \stackrel{def}{=} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \otimes \nabla = \mathbf{1} - \mathbf{F}^{-1} \\ j_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} - F_{ij}^{-1} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$	(2.15)
---	--	--------

$$\begin{cases} du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = j_{ij} dx_j & i, j \in \{1, 2, 3\} \\ d\mathbf{u} = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{x} \end{cases} \quad (2.16)$$

2.4 Tensors de deformació

Considerem ara una partícula del medi continu, que ocupa el punt de l'espai P en la configuració material, i una altra partícula Q del seu entorn diferencial separada de l'anterior pel segment $d\mathbf{X}$ (de longitud $dS = \sqrt{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}$), sent $d\mathbf{x}$ (de longitud $ds = \sqrt{d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}}$) el seu homòleg en la configuració actual (vegeu la Figura 2-3). Tots dos vectors diferencials estan relacionats pel tensor gradient de la deformació $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ mitjançant les equacions (2.2) o (2.6):

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} & d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\ dx_i = F_{ij} dX_j & dX_i = F_{ij}^{-1} dx_j \end{cases} \quad (2.17)$$

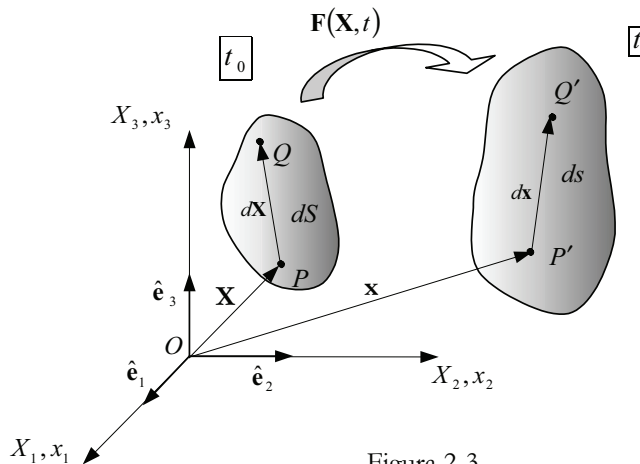


Figura 2-3

Lavors es pot escriure el següent:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = [d\mathbf{x}]^T \cdot [d\mathbf{x}] = [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}]^T \cdot [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}] = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \\ (ds)^2 &= dx_k dx_k = F_{ki} dX_i F_{kj} dX_j = dX_i F_{ki} F_{kj} dX_j = dX_i F_{ik}^T F_{kj} dX_j \end{aligned} \quad (2.18)$$

i, alternativament,

$$\begin{aligned} (dS)^2 &= d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = [d\mathbf{X}]^T \cdot [d\mathbf{X}] = [\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}]^T \cdot [\mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}] \stackrel{not}{=} d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\ (dS)^2 &= dX_k dX_k = F_{ki}^{-1} dx_i F_{kj}^{-1} dx_j = dx_i F_{ki}^{-1} F_{kj}^{-1} dx_j = dx_i F_{ik}^{-T} F_{kj}^{-1} dx_j \end{aligned} \quad (2.19)$$

NOTACIÓ

S'utilitza la convenció:

$$[(\bullet)^{-1}]^T \stackrel{not}{=} (\bullet)^{-T}$$

2.4.1 Tensor material de deformació (tensor de deformació de Green-Lagrange)

Restant les expressions (2.18) i (2.19) s'obté:

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 - (dS)^2 &= d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} - d\mathbf{X} \cdot \mathbf{1} \cdot d\mathbf{X} = \\
 &= d\mathbf{X} \cdot \underbrace{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})}_{\substack{\text{def} \\ = 2\mathbf{E}}} \cdot d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

L'equació (2.20) defineix implícitament el denominat *tensor material de deformació* o *tensor de deformació de Green-Lagrange* com:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor material} \\ \text{de deformació} \\ \text{(Green - Lagrange)} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) \\ E_{ij}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(F_{ki}F_{kj} - \delta_{ij}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \tag{2.21}$$

Observació 2-3

El tensor material de deformació \mathbf{E} és simètric. La demostració s'obté directament de l'equació (2.21) observant que:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})^T = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F}^T)^T - \mathbf{1}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) = \mathbf{E} \\ E_{ij} = E_{ji} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

2.4.2 Tensor espacial de deformació (tensor de deformació d'Almansi)

Restant de forma alternativa les expressions (2.18) i (2.19) s'obté:

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 - (dS)^2 &= d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} = d\mathbf{x} \cdot \mathbf{1} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{x} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x} \\
 &= d\mathbf{x} \cdot \underbrace{(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})}_{\substack{\text{def} \\ = 2\mathbf{e}}} \cdot d\mathbf{x} = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

L'equació (2.22) defineix implícitament el denominat *tensor espacial de deformació* o *tensor de deformació d'Almansi* com:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor espacial} \\ \text{de deformació} \\ \text{(Almansi)} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ e_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - F_{ki}^{-1}F_{kj}^{-1}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \tag{2.23}$$

Observació 2-4

El tensor espacial de deformació \mathbf{e} és simètric. La demostració s'obté directament de l'equació (2.23) observant que:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{e}^T &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1})^T = \frac{1}{2}(\mathbf{1}^T - (\mathbf{F}^{-1})^T \cdot (\mathbf{F}^{-T})^T) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{e} \\ e_{ij} &= e_{ji} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right.$$

Observació 2-5

Els tensors material \mathbf{E} i espacial \mathbf{e} de deformació *són tensors diferents i no es tracta de la descripció material i espacial d'un mateix tensor de deformació*. Les expressions (2.20) i (2.22):

$$(ds)^2 - (dS)^2 = 2 d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{x} \cdot \mathbf{e} \cdot d\mathbf{x}$$

ho posen de manifest, atès que els dos tensors són afectats per diferents vectors ($d\mathbf{X}$ i $d\mathbf{x}$ respectivament).

El *tensor de deformació de Green-Lagrange* ve descrit *naturalment* en la descripció material ($\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$). En l'equació (2.20) actua sobre l'element $d\mathbf{X}$ (definit en la configuració material) i d'aquí ve la seva denominació de *tensor material de deformació*. Tanmateix, com tota propietat de medi continu es pot descriure, si cal, també en forma espacial ($\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$) mitjançant la substitució adequada de les equacions de moviment.

Amb el *tensor de deformació d'Almansi* passa el contrari: ve descrit *naturalment* en forma espacial i en l'equació (2.22) actua sobre el vector diferencial (definit en la configuració espacial) $d\mathbf{x}$ i d'aquí ve la seva denominació de *tensor espacial de deformació*. També es pot descriure, si és convenient, en forma material ($\mathbf{e}(\mathbf{X}, t)$).

Exemple 2-2 – Per al moviment de l'Exemple 2-1, obteniu els tensors material i espacial de deformació.

a) Tensor material de deformació: $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) =$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & A \\ -A & -A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -A \\ 0 & 1 & -A \\ -A & A & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A^2 & -A^2 & -2A \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ -2A & 0 & 2A^2 \end{bmatrix}$$

b) Tensor espacial de deformació: $\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) =$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1+A^2 & A^2 & A \\ -A^2 & 1-A^2 & -A \\ A & A & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1+A^2 & -A^2 & A \\ A^2 & 1-A^2 & A \\ A & -A & 1 \end{bmatrix} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3A^2 - 2A^4 & A^2 + 2A^4 & -2A - 2A^3 \\ A^2 + 2A^4 & A^2 - 2A^4 & 2A^3 \\ -2A - 2A^3 & 2A^3 & -2A^2 \end{bmatrix}$$

(Observeu que $\mathbf{E} \neq \mathbf{e}$).

2.4.3 Expressió dels tensors de deformació en termes dels (gradient dels) desplaçaments

Substituint les expressions (2.12) ($\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J}$) i (2.15) ($\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{j}$) en les equacions (2.21) i (2.23) s'obtenen les expressions dels tensors de deformació en funció del gradient material, $\mathbf{J}(\mathbf{X}, t)$, i espacial, $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$, dels desplaçaments:

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}[(\mathbf{1} + \mathbf{J}^T) \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{J}) - \mathbf{1}] = \frac{1}{2}[\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}] \\ E_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{2}[\mathbf{1} - (\mathbf{1} - \mathbf{j}^T) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{j})] = \frac{1}{2}[\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T \cdot \mathbf{j}] \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.25)$$

2.5 Variació de les distàncies: estirament, allargament unitari

Considerem ara una partícula P en la configuració de referència i una altra partícula Q , situada en un entorn diferencial de P , vegeu la Figura 2-4. Les posicions corresponents en la configuració actual vénen donades pels punts de l'espai P' i Q' , de manera que la distància entre les dues partícules en la configuració de referència, dS , es transforma en ds en l'instant actual. Siguin \mathbf{T} i \mathbf{t} sengles vectors unitaris en les direccions \overline{PQ} i $\overline{P'Q'}$, respectivament.

Definició

Estirament: en el punt material P (o en el punt espacial P') en la direcció material \mathbf{T} (o en la direcció espacial \mathbf{t}) és la longitud del segment diferencial *deformat* $\overline{P'Q'}$ per unitat de longitud del segment diferencial *original* \overline{PQ} .

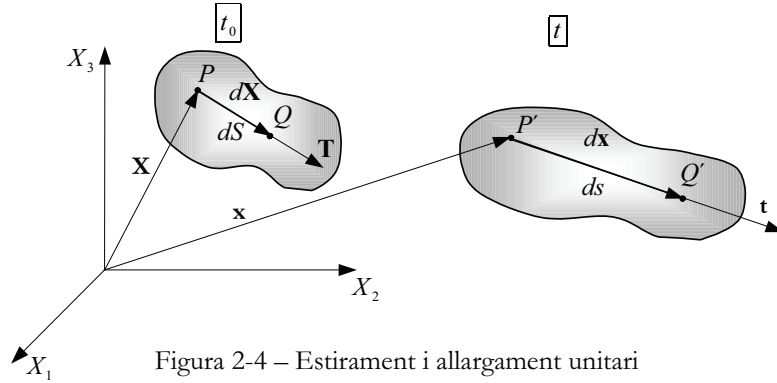


Figura 2-4 – Estirament i allargament unitari

La traducció a llenguatge matemàtic de la definició anterior és:

$$\text{Estirament} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\mathbf{T}} = \lambda_{\mathbf{t}} = \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \frac{ds}{dS} \quad (0 < \lambda < \infty) \quad (2.26)$$

NOTACIÓ

Sovint es prescindeix dels subíndexs $(\bullet)_{\mathbf{T}}$ o $(\bullet)_{\mathbf{t}}$ en referir-se als estiraments o allargaments unitaris. Tingueu ben present, tanmateix, que sempre estan associats a una direcció determinada.

Definició

Allargament unitari: en el punt material P (o en el punt espacial P') en la direcció material \mathbf{T} (o en la direcció espacial \mathbf{t}) és l'increment de longitud del segment diferencial *deformat* $\overline{P'Q'}$ per unitat de longitud del segment diferencial *original* \overline{PQ} .

i la definició matemàtica corresponent:

$$\text{Allargament unitari} \stackrel{\text{def}}{=} \varepsilon_{\mathbf{T}} = \varepsilon_{\mathbf{t}} = \frac{\Delta \overline{PQ}}{\overline{PQ}} = \frac{ds - dS}{dS} \quad (2.27)$$

Les equacions (2.26) i (2.27) permeten relacionar immediatament els valors de l'allargament unitari i de l'estirament per a un mateix punt i direcció com:

$$\varepsilon = \frac{ds - dS}{dS} = \frac{ds}{\lambda dS} - 1 = \lambda - 1 \quad (\Rightarrow -1 < \varepsilon < \infty) \quad (2.28)$$

Observació 2-6

- Si $\lambda = 1$ ($\epsilon = 0$) $\Rightarrow ds = dS$: Les partícules P i Q es poden haver mogut relativament amb el temps, però sense augmentar ni disminuir la distància entre elles.
- Si $\lambda > 1$ ($\epsilon > 0$) $\Rightarrow ds > dS$: La distància entre les partícules P i Q s'ha allargat amb la deformació del medi.
- Si $\lambda < 1$ ($\epsilon < 0$) $\Rightarrow ds < dS$: La distància entre les partícules P i Q s'ha escurçat amb la deformació del medi.

2.5.1 Estiraments, allargaments unitaris i els tensors de deformació

Considerant les equacions (2.20) i (2.22) i les expressions geomètriques $d\mathbf{X} = \mathbf{T} dS$ i $d\mathbf{x} = \mathbf{t} ds$, vegeu la Figura 2-4, es pot escriure el següent:

$$\begin{cases} (ds)^2 - (dS)^2 = 2 \frac{d\mathbf{X}}{dS} \cdot \mathbf{E} \cdot \frac{d\mathbf{X}}{dS} = 2(dS)^2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} \\ (ds)^2 - (dS)^2 = 2 \frac{d\mathbf{x}}{ds} \cdot \mathbf{e} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} = 2(ds)^2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} \end{cases} \quad (2.29)$$

i dividint les dues equacions per $(dS)^2$ i $(ds)^2$, respectivament, s'obté el següent:

$$\left(\frac{ds}{dS} \right)^2 - 1 = \lambda^2 - 1 = 2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \sqrt{1 + 2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}} \\ \epsilon = \lambda - 1 = \sqrt{1 + 2 \mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}} - 1 \end{cases} \quad (2.30)$$

$$1 - \left(\frac{dS}{ds} \right)^2 = 1 - (1/\lambda)^2 = 2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}}} \\ \epsilon = \lambda - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}}} - 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

expressions que permeten calcular l'allargament unitari i l'estirament segons una direcció (material, \mathbf{T} o espacial, \mathbf{t}) determinada.

Observació 2-7

Els tensors material i espacial de deformació $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ i $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ contenen informació sobre els estiraments (i els allargaments unitaris) per a qualsevol direcció en un entorn diferencial d'una partícula donada, tal com posen de manifest les equacions (2.30) i (2.31).

Exemple 2-3 – El tensor espacial de deformació per a un cert moviment és:

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -te^{tz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -te^{tz} & 0 & t(2e^{tz} - e^t) \end{bmatrix}$$

Calculeu la longitud, en l'instant $t=0$, del segment que en l'instant $t=2$ és rectilini i uneix els punts $\mathbf{a} \equiv (0,0,0)$ i $\mathbf{b} \equiv (1,1,1)$.

Es coneix la forma i posició geomètrica del segment material en l'instant $t=2$. En l'instant $t=0$ (instant de referència) el segment no és necessàriament rectilini i no es coneixen les posicions dels seus extrems \mathbf{A} i \mathbf{B} (vegeu la Figura 2-5). Per conèixer-ne la longitud s'ha d'aplicar l'equació (2.31):

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}}} = \frac{ds}{dS} \Rightarrow dS = \frac{1}{\lambda} ds$$

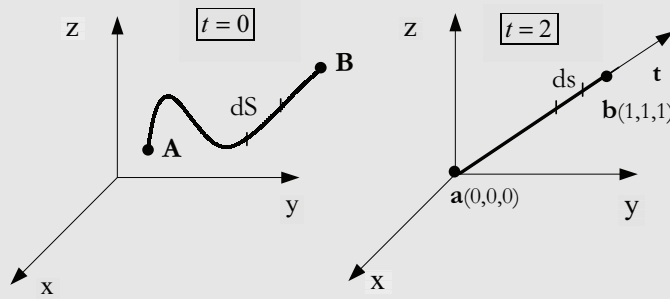


Figura 2-5

per a un vector de direcció en la configuració espacial \mathbf{t} de valor:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1, 1, 1]^T \text{ i s'obté:}$$

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{3}} [1 \ 1 \ 1] \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -te^{tz} \\ 0 & 0 & 0 \\ -te^{tz} & 0 & t(2e^{tz} - e^t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{3} te^t$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{3} te^t}} \Rightarrow \lambda|_{t=2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} e^2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3 + 4e^2}}$$

$$\Rightarrow l_{AB} = \int_A^B dS = \int_a^b \frac{1}{\lambda} ds = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\int_a^b ds}_{l_{ab}} = \frac{1}{\lambda} l_{ab} = \frac{1}{\lambda} \sqrt{3} \Rightarrow l_{AB} = \sqrt{3 + 4e^2}$$

2.6 Variació d'angles

Considerem ara una partícula P i unes altres dues partícules Q i R , situades en un entorn diferencial de P en la configuració material, vegeu la Figura 2-6, i

les mateixes partícules ocupant les posicions espacials P' , Q' i R' . Es planteja ara la relació entre els angles que formen els segments diferencials corresponents en la configuració de referència (angle Θ), i en la configuració actual (angle θ).

A partir de les equacions (2.2) i (2.6), aplicades als vectors diferencials que separen les partícules, es pot escriure:

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)} \\ d\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\mathbf{X}^{(1)} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}^{(1)} \\ d\mathbf{X}^{(2)} = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} \end{cases} \quad (2.32)$$

i per la pròpia definició dels vectors unitaris $\mathbf{T}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)}$, $\mathbf{t}^{(1)}$ i $\mathbf{t}^{(2)}$ que defineixen les direccions corresponents en la Figura 2-6:

$$\begin{cases} d\mathbf{X}^{(1)} = dS^{(1)} \mathbf{T}^{(1)} \\ d\mathbf{X}^{(2)} = dS^{(2)} \mathbf{T}^{(2)} \end{cases} \quad \begin{cases} d\mathbf{x}^{(1)} = ds^{(1)} \mathbf{t}^{(1)} \\ d\mathbf{x}^{(2)} = ds^{(2)} \mathbf{t}^{(2)} \end{cases} \quad (2.33)$$

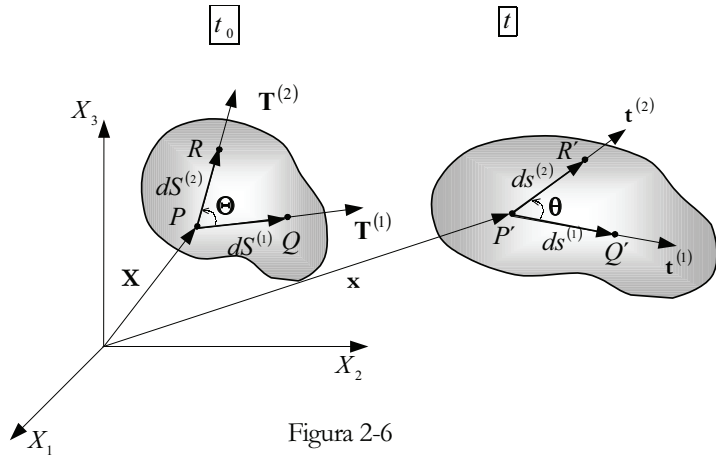


Figura 2-6

i, finalment, per la definició (2.26) dels estiraments corresponents:

$$\begin{cases} ds^{(1)} = \lambda^{(1)} dS^{(1)} \\ ds^{(2)} = \lambda^{(2)} dS^{(2)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dS^{(1)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} ds^{(1)} \\ dS^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(2)}} ds^{(2)} \end{cases} \quad (2.34)$$

Plantejant ara el producte escalar dels vectors $d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} ds^{(1)} ds^{(2)} \cos \theta &= |d\mathbf{x}^{(1)}| \cdot |d\mathbf{x}^{(2)}| \cos \theta = d\mathbf{x}^{(1)} \cdot d\mathbf{x}^{(2)} = [d\mathbf{x}^{(1)}]^T \cdot [d\mathbf{x}^{(2)}] = \\ &= [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)}] = d\mathbf{X}^{(1)} \cdot \underbrace{(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})}_{2\mathbf{E} + \mathbf{1}} \cdot d\mathbf{X}^{(2)} = \\ &= dS^{(1)} \mathbf{T}^{(1)} \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{1}) \cdot \mathbf{T}^{(2)} dS^{(2)} = \frac{1}{\lambda^{(1)}} ds^{(1)} \mathbf{T}^{(1)} \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{1}) \cdot \mathbf{T}^{(2)} \frac{1}{\lambda^{(2)}} ds^{(2)} = \\ &= ds^{(1)} ds^{(2)} \frac{1}{\lambda^{(1)}} \frac{1}{\lambda^{(2)}} \mathbf{T}^{(1)} \cdot (2\mathbf{E} + \mathbf{1}) \cdot \mathbf{T}^{(2)} \end{aligned} \quad (2.35)$$

i comparant els termes inicial i final de l'equació (2.35), s'obté el següent:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\lambda^{(1)} \lambda^{(2)}} \quad (2.36)$$

on els estiraments $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$ es poden obtenir aplicant l'expressió (2.30) a les direccions $\mathbf{T}^{(1)}$ i $\mathbf{T}^{(2)}$ arribant-se a:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2 \mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)}} \sqrt{1 + 2 \mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}} \quad (2.37)$$

D'una manera anàloga, operant en la configuració de referència, es pot obtenir l'angle Θ entre els segments diferencials $d\mathbf{X}^{(1)}$ i $d\mathbf{X}^{(2)}$ (en funció de $\mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{t}^{(2)}$ i \mathbf{e}) com:

$$\cos \Theta = \frac{\mathbf{t}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} - 2\mathbf{e}) \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\sqrt{1 - 2 \mathbf{t}^{(1)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(1)}} \sqrt{1 - 2 \mathbf{t}^{(2)} \cdot \mathbf{e} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}} \quad (2.38)$$

Observació 2-8

De forma similar al que s'ha comentat en l'Observació 2-7, els tensors material i espacial de deformació, $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ i $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ també contenen informació sobre les variacions dels angles entre segments diferencials, a l'entorn d'una partícula, durant el procés de deformació. Aquests fets seran la base per proporcionar una interpretació física dels components dels tensors de deformació a l'apartat 2.7.

2.7 Interpretació física dels tensors de deformació

2.7.1 Tensor material de deformació

Considerem un segment \overline{PQ} , orientat paral·lelament a l'eix X_1 en la configuració de referència (vegeu la Figura 2-7). Abans de la deformació \overline{PQ} té una longitud coneguda $dS = dX$.

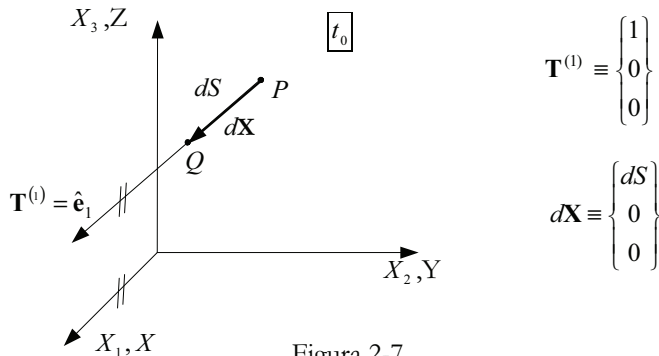


Figura 2-7

Es pretén conèixer la longitud de $\overline{P'Q'}$ després de la deformació. Per a això considerem el tensor material de deformació \mathbf{E} donat pels seus components:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{XX} & E_{XY} & E_{XZ} \\ E_{XY} & E_{YY} & E_{YZ} \\ E_{XZ} & E_{YZ} & E_{ZZ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

En conseqüència:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T} = [\mathbf{T}]^T \cdot [\mathbf{E}] \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{12} & E_{22} & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & E_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = E_{11} \quad (2.40)$$

L'estirament en la direcció material X_1 es pot obtenir ara substituint el valor $\mathbf{T} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}$ en l'expressió de l'estirament (2.30), obtenint-se: $\lambda_1 = \sqrt{1 + 2E_{11}}$. De manera anàloga, es poden considerar segments orientats a les direccions $X_2 \equiv Y$ i $X_3 \equiv Z$ i obtenir els valors λ_2 i λ_3 , resultant:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{1 + 2E_{11}} = \sqrt{1 + 2E_{XX}} \Rightarrow \epsilon_X = \lambda_X - 1 = \sqrt{1 + 2E_{XX}} - 1 \\ \lambda_2 &= \sqrt{1 + 2E_{22}} = \sqrt{1 + 2E_{YY}} \Rightarrow \epsilon_Y = \lambda_Y - 1 = \sqrt{1 + 2E_{YY}} - 1 \\ \lambda_3 &= \sqrt{1 + 2E_{33}} = \sqrt{1 + 2E_{ZZ}} \Rightarrow \epsilon_Z = \lambda_Z - 1 = \sqrt{1 + 2E_{ZZ}} - 1 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Observació 2-9

En els components E_{XX} , E_{YY} i E_{ZZ} (o E_{11} , E_{22} i E_{33}) de la diagonal principal del tensor \mathbf{E} (denominats *deformacions longitudinals*) hi ha continguda la informació sobre l'estirament i els allargaments unitaris de segments diferencials inicialment (*en la configuració de referència*) orientats en direccions X , Y i Z .

- Si $E_{XX} = 0 \Rightarrow \epsilon_X = 0 \Rightarrow$ No hi ha allargament en la direcció X .
- Si $E_{YY} = 0 \Rightarrow \epsilon_Y = 0 \Rightarrow$ No hi ha allargament en la direcció Y .
- Si $E_{ZZ} = 0 \Rightarrow \epsilon_Z = 0 \Rightarrow$ No hi ha allargament en la direcció Z .

Considerem ara l'angle entre els segments PQ (paral·lel a l'eix X_1) i PR , (paral·lel a l'eix X_2), sent Q i R dues partícules de l'entorn diferencial de P en la configuració de material i P', Q' i R' les posicions respectives en la configuració espacial (vegeu la Figura 2-8). Conegut l'angle ($\Theta = \frac{\pi}{2}$) entre els segments en la configuració de referència és possible conèixer l'angle θ en la configuració actual, utilitzant l'expressió (2.37) i tenint en compte la seva ortogonalitat ($\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = 0$) i les igualtats $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)} = E_{11}$, $\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = E_{22}$ i $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = E_{12}$,

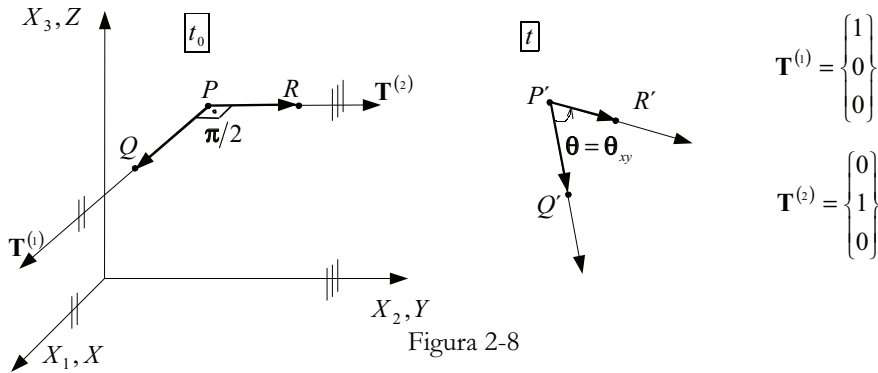
$$\cos \theta = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot (\mathbf{1} + 2\mathbf{E}) \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(1)}} \sqrt{1 + 2\mathbf{T}^{(2)} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}} = \frac{2E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \quad (2.42)$$

o el que és el mateix:

$$\theta \equiv \theta_{xy} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{2E_{xy}}{\sqrt{1 + 2E_{xx}} \sqrt{1 + 2E_{yy}}} \quad (2.43)$$

i l'increment de l'angle final respecte al seu valor inicial resulta:

$$\Delta\theta_{xy} = \theta_{xy} - \frac{\pi}{2} = -\arcsin \frac{2E_{xy}}{\sqrt{1 + 2E_{xx}} \sqrt{1 + 2E_{yy}}} \quad (2.44)$$



Resultats anàlegs s'obtenen a partir de parells de segments orientats segons els diferents eixos de coordenades i s'arriba a:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{xy} &= -\arcsin \frac{2E_{xy}}{\sqrt{1 + 2E_{xx}} \sqrt{1 + 2E_{yy}}} \\ \Delta\theta_{xz} &= -\arcsin \frac{2E_{xz}}{\sqrt{1 + 2E_{xx}} \sqrt{1 + 2E_{zz}}} \\ \Delta\theta_{yz} &= -\arcsin \frac{2E_{yz}}{\sqrt{1 + 2E_{yy}} \sqrt{1 + 2E_{zz}}} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Observació 2-10

En els components E_{xy} , E_{xz} i E_{yz} (o E_{12} , E_{13} i E_{23}) del tensor \mathbf{E} (denominats *deformacions angulars*) està continguda la informació sobre la variació dels angles entre segments diferencials inicialment (en la configuració material) orientats a les direccions X , Y i Z .

- Si $E_{xy} = 0 \Rightarrow$ La deformació no produeix variació de l'angle de dos segments situats inicialment en les direccions X i Y .
- Si $E_{xz} = 0 \Rightarrow$ La deformació no produeix variació de l'angle de dos segments situats inicialment en les direccions X i Z .
- Si $E_{yz} = 0 \Rightarrow$ La deformació no produeix variació de l'angle de dos segments situats inicialment en les direccions Y i Z .

En la Figura 2-9 es presenta la interpretació física dels components del tensor material de deformació sobre un paral·lelepípede elemental en l'entorn d'una partícula P amb arestes orientades segons els eixos coordenats.

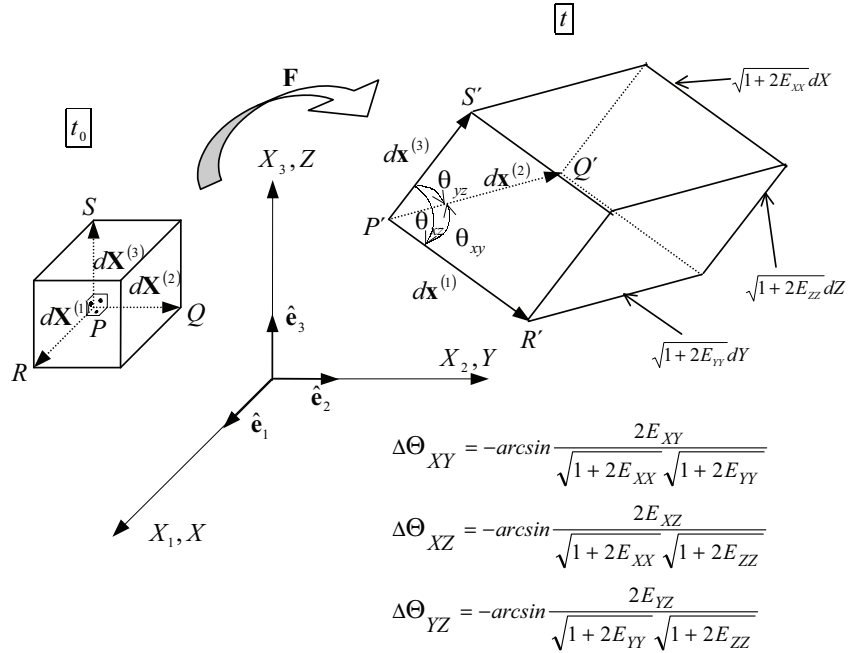


Figura 2-9 – Interpretació física del tensor material de deformació

2.7.2 Tensor espacial de deformació

Arguments semblants als de la secció 2.7.1 permeten interpretar al seu torn els components del tensor espacial de deformació:

$$\mathbf{e} \equiv \begin{bmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{xy} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{xz} & e_{yz} & e_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22} & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

Els components de la diagonal principal (deformacions longitudinals) es poden interpretar en funció dels estiraments i allargaments unitaris de segments diferencials orientats segons els eixos coordenats *en la configuració actual o deformada*:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{11}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{xx}}} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{xx}}} - 1 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{22}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{yy}}} \Rightarrow \epsilon_y = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{yy}}} - 1 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{\sqrt{1-2e_{33}}} = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{zz}}} \Rightarrow \epsilon_z = \frac{1}{\sqrt{1-2e_{zz}}} - 1 \end{aligned} \quad (2.47)$$

mentre que els components fora de la diagonal principal (deformacions angulars) contenen informació sobre la variació d'angles entre segments

diferencials orientats segons els eixos coordenats en la configuració actual o deformada:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_{xy} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{XY} = -\arcsin \frac{2e_{xy}}{\sqrt{1-2e_{xx}}\sqrt{1-2e_{yy}}} \\ \Delta\theta_{xz} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{XZ} = -\arcsin \frac{2e_{xz}}{\sqrt{1-2e_{xx}}\sqrt{1-2e_{zz}}} \\ \Delta\theta_{yz} &= \frac{\pi}{2} - \Theta_{YZ} = -\arcsin \frac{2e_{yz}}{\sqrt{1-2e_{yy}}\sqrt{1-2e_{zz}}}\end{aligned}\quad (2.48)$$

El resum de la interpretació física corresponent es presenta en la Figura 2-10:

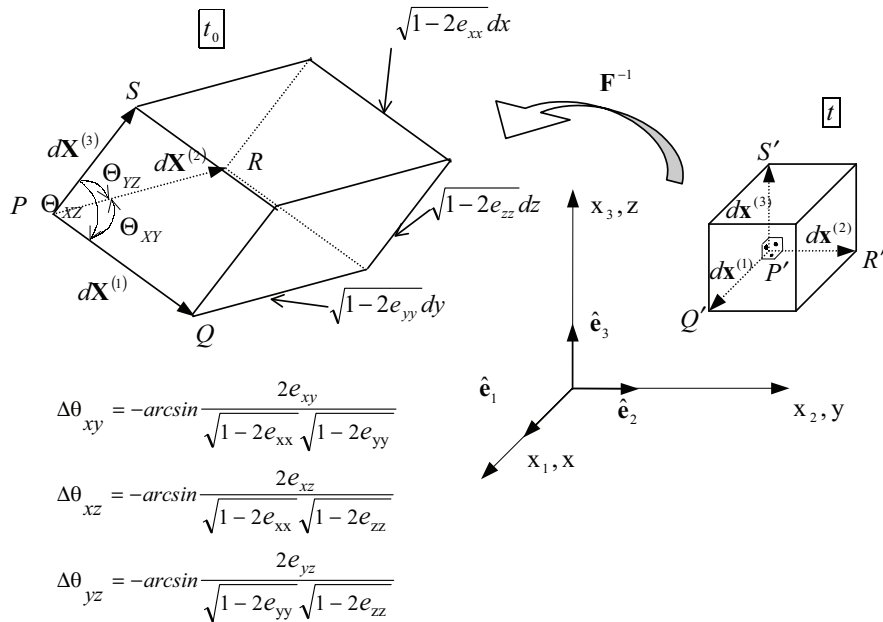


Figura 2-10 – Interpretació física del tensor espacial de deformació

2.8 Descomposició polar

El *teorema de descomposició polar* de l'anàlisi tensorial estableix que, donat un tensor de segon ordre \mathbf{F} tal que $|\mathbf{F}| > 0$, existeixen un tensor ortogonal \mathbf{Q} , i dos tensors simètrics \mathbf{U} i \mathbf{V} :

RECORDATORI

Un tensor de segon ordre \mathbf{Q} és ortogonal si es verifica:

$$\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{1}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}} \\ \mathbf{V} &= \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T} \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q} \quad (2.49)$$

La descomposició (2.49) és única per a cada tensor \mathbf{F} i es denomina *descomposició polar per l'esquerra* ($\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$) o *descomposició polar per la dreta* ($\mathbf{F} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}$) i als tensors \mathbf{U} i \mathbf{V} , tensors dret i esquerre d'estirament, respectivament.

NOTA

Per obtenir l'arrel quadrada d'un tensor es procedeix a diagonalitzar el tensor, s'obté l'arrel quadrada dels elements de la diagonal de la matriu de components diagonalitzada i es desfà la diagonalització.

Observació 2-11

Un tensor ortogonal \mathbf{Q} rep el nom de *tensor de rotació* i a l'aplicació $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ se la denomina *rotació*. Una rotació té les propietats següents:

- Quan s'aplica a qualsevol vector \mathbf{x} , el resultat és un vector $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ del mateix mòdul:

$$\|\mathbf{y}\|^2 = \mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = [\mathbf{y}]^T \cdot [\mathbf{y}] = [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}]^T \cdot [\mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}] = \mathbf{x} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}}_1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$$

- El resultat de multiplicar (aplicar) el tensor ortogonal \mathbf{Q} a dos vectors $\mathbf{x}^{(1)}$ i $\mathbf{x}^{(2)}$ amb el mateix origen i que formen entre si un angle α , manté el mateix angle entre les imatges ($\mathbf{y}^{(1)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(1)}$ i $\mathbf{y}^{(2)} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(2)}$):

$$\frac{\mathbf{y}^{(1)} \cdot \mathbf{y}^{(2)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\| \|\mathbf{y}^{(2)}\|} = \frac{\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}^{(2)}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\| \|\mathbf{y}^{(2)}\|} = \frac{\mathbf{x}^{(1)} \cdot \mathbf{x}^{(2)}}{\|\mathbf{x}^{(1)}\| \|\mathbf{x}^{(2)}\|} = \cos \alpha$$

En conseqüència, l'aplicació (rotació) $\mathbf{y} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{x}$ manté els angles i les distàncies.

Considerant ara el tensor gradient de la deformació i la relació fonamental (2.2) ($d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$) i la descomposició polar (2.49) s'obté el següent:

NOTACIÓ

S'utilitza aquí la notació (\circ) per indicar la composició de dues aplicacions ξ i φ :

$$\mathbf{z} = \varphi \circ \xi(\mathbf{x})$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{V} \cdot \overbrace{(\mathbf{Q} \cdot d\mathbf{X})}^{\substack{\text{deformació} \\ \text{rotació}}} \quad (2.50)$$

$$\mathbf{F}(\bullet) \equiv \text{deformació} \overset{\text{not}}{\circ} \text{rotació}(\bullet)$$

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}) \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{Q} \cdot \overbrace{(\mathbf{U} \cdot d\mathbf{X})}^{\substack{\text{rotació} \\ \text{deformació}}} \quad (2.51)$$

$$\mathbf{F}(\bullet) \equiv \text{rotació} \circ \text{deformació}(\bullet)$$

Observació 2-12

Les equacions (2.50) estableixen que el moviment relatiu en l'entorn d'una partícula durant el procés de deformació (caracteritzat pel tensor \mathbf{F}) es pot entendre com la *composició* d'una *rotació* (caracteritzada pel tensor de rotació \mathbf{Q} , que manté angles i distàncies) i una *deformació pròpiament dita* (que modifica angles i distàncies) caracteritzada pel tensor \mathbf{V} (vegeu la Figura 2-11).

Observació 2-13

- Alternativament les equacions (2.51) permeten caracteritzar el moviment relatiu en l'entorn d'una partícula durant el procés de deformació com la *superposició* d'una *deformació pròpiament dita* (caracteritzada pel tensor \mathbf{U}) i una *rotació* (caracteritzada pel tensor de rotació \mathbf{Q}).
- Un moviment de sòlid rígid és un cas particular de deformació caracteritzat per $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{1}$ y $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$.

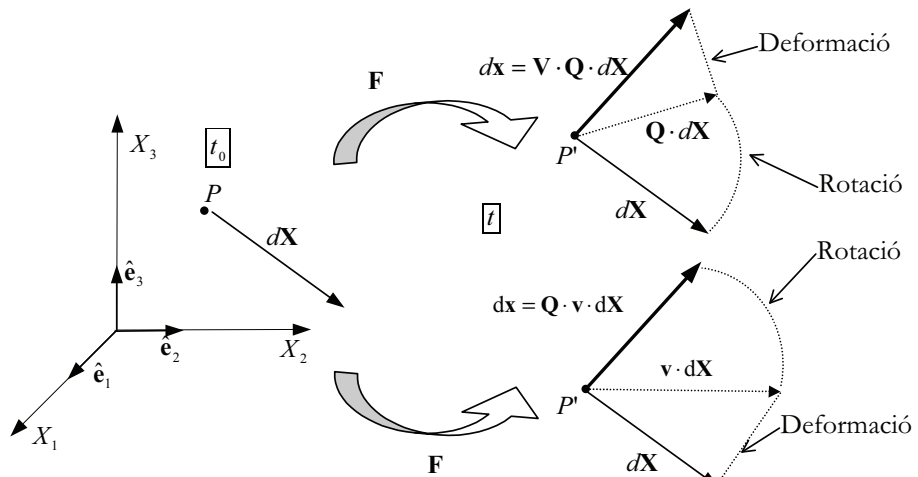


Figura 2-11 – Descomposició polar

2.9 Variació de volum

Considerem una partícula P del medi continu en la configuració de referència, ($t=0$) que té associat un volum diferencial dV_0 (vegeu la Figura 2-12) que queda caracteritzat mitjançant les posicions d'unes altres tres partícules Q , R i S del seu entorn diferencial, alineades amb P segons tres direccions arbitràries. El diferencial de volum dV_t , associat a la mateixa partícula en la configuració actual (a temps t), quedarà també caracteritzat pels punts espacials P' , Q' , R' i S' corresponents de la figura (les posicions de la qual configuraran un paral·lelepípede que ja no està orientat segons els eixos coordenats).

Siguin $d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{X}^{(2)}$ i $d\mathbf{X}^{(3)}$ els vectors de posició relatius entre partícules en la configuració material, i $d\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(2)}$ i $d\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(3)}$ els seus homòlegs en la configuració espacial. Evidentment es compleixen les relacions:

2.10 Variació de l'àrea

Considerem ara el diferencial d'àrea dA associat a una partícula P en la configuració de referència i la seva variació al llarg del temps. Per definir el diferencial d'àrea esmentat, considerarem dues partícules Q i R de l'entorn diferencial de P , les posicions relatives de les quals respecte a aquesta són $d\mathbf{X}^{(1)}$ i $d\mathbf{X}^{(2)}$ (vegeu la Figura 2-13). Considerem també una partícula auxiliar qualsevol S i el seu vector de posició relatiu $d\mathbf{X}^{(3)}$. Associat a l'escalar diferencial d'àrea, dA , definirem el *vector diferencial d'àrea* $d\mathbf{A} = dA\mathbf{N}$ el mòdul del qual és dA i la direcció del qual és la de la normal \mathbf{N} .

En la configuració actual, en el temps t , la partícula ocuparà un punt espacial P' , i tindrà associat un diferencial d'àrea da que, al seu torn, defineix un vector diferencial d'àrea $d\mathbf{a} = da\mathbf{n}$, on \mathbf{n} és la corresponent normal. Considerem també les posicions de les altres partícules Q' i R' i S' i els seus vectors de posició relatius $d\mathbf{x}^{(1)}$, $d\mathbf{x}^{(2)}$ i $d\mathbf{x}^{(3)}$.

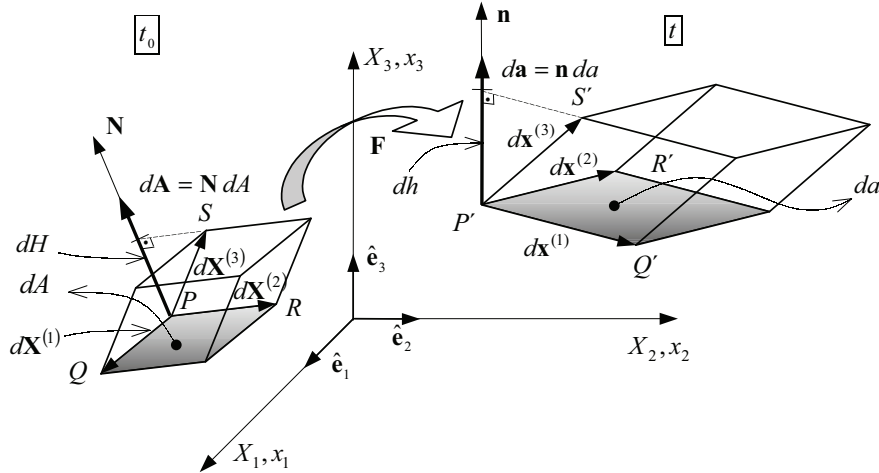


Figura 2-13 – Variació de l'àrea

Els volums dV_0 i dV_t dels paral·lelepípedes respectius es podran calcular com:

$$\begin{aligned} dV_0 &= dH dA = \underbrace{d\mathbf{X}^{(3)}}_{dH} \cdot \underbrace{\mathbf{N} dA}_{d\mathbf{A}} = d\mathbf{X}^{(3)} \cdot \underbrace{\mathbf{N} dA}_{d\mathbf{A}} = d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{X}^{(3)} \\ dV_t &= dh da = \underbrace{d\mathbf{x}^{(3)}}_{dh} \cdot \underbrace{\mathbf{n} da}_{d\mathbf{a}} = d\mathbf{x}^{(3)} \cdot \underbrace{\mathbf{n} da}_{d\mathbf{a}} = d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}^{(3)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

i tenint en compte que $d\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(3)}$, com també l'equació de canvi de volum (2.55), es pot escriure:

$$d\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}^{(3)} = d\mathbf{a} \cdot d\mathbf{x}^{(3)} = dV_t = |\mathbf{F}| dV_0 = |\mathbf{F}| d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{X}^{(3)} \quad \forall d\mathbf{X}^{(3)} \quad (2.57)$$

Comparant el primer i últim terme de (2.57) i tenint en compte que la posició relativa de la partícula S és qualsevol (i, per tant, també ho és el vector $d\mathbf{X}^{(3)}$), s'arriba finalment a:

$$d\mathbf{a} \cdot \mathbf{F} = |\mathbf{F}| d\mathbf{A} \Rightarrow \boxed{d\mathbf{a} = |\mathbf{F}| d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}} \quad (2.58)$$

NOTA

Es té en compte aquí el teorema de l'àlgebra tensorial següent: donats dos vectors \mathbf{a} i \mathbf{b} , si es compleix que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{x}$ per a tot vector $\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b}$.

Per obtenir una relació entre els *escalars diferencial d'àrea* dA i da se substitueixen les expressions $d\mathbf{A} = \mathbf{N} dA$ i $d\mathbf{a} = \mathbf{n} da$ en l'equació (2.58) i es prenen mòduls:

$$da \mathbf{n} = |\mathbf{F}| \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} dA \Rightarrow da = |\mathbf{F}| \|\mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1}\| dA \quad (2.59)$$

2.11 Deformació infinitesimal

La teoria de la deformació infinitesimal (també denominada *teoria de petites deformacions*) es basa en dues hipòtesis simplifícatives sobre la teoria general (o de *deformació finita*) contemplada en apartats anteriors (vegeu la Figura 2-14).

Hipòtesi

- 1) Els desplaçaments són molt petits davant les dimensions típiques del medi continu ($\|\mathbf{u}\| \ll \|\mathbf{X}\|$).
- 2) Els gradients dels desplaçaments són molt petits (infinitesimals).

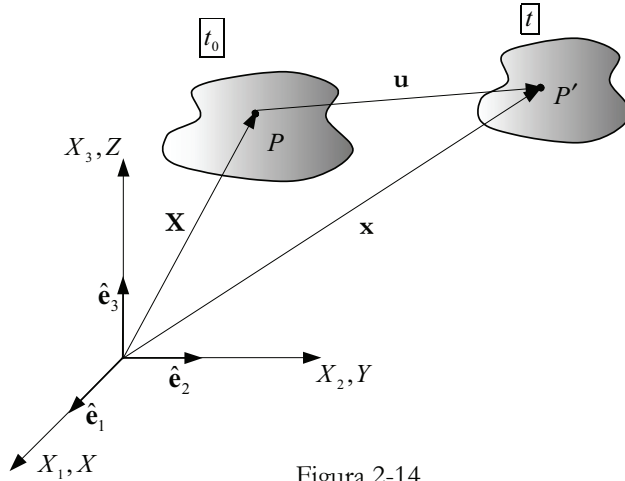


Figura 2-14

En virtut de la primera hipòtesi, les configuracions de referència, Ω_0 i actual, Ω_t , estan molt pròximes entre si i es consideren indistingibles una de l'altra. En conseqüència, les coordenades materials i espacials coincideixen i ja no té sentit parlar de descripcions material i espacial:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} \cong \mathbf{X} \\ x_i = X_i + u_i \cong X_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \overset{\text{not}}{=} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ U_i(\mathbf{X}, t) \overset{\text{not}}{=} u_i(\mathbf{X}, t) \equiv u_i(\mathbf{x}, t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.60)$$

La segona hipòtesi es pot escriure matemàticament com:

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1, \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (2.61)$$

2.11.1 Tensors de deformació. Tensor de deformació infinitesimal

Els tensors gradient material i gradient espacial dels desplaçaments coincideixen. Efectivament, atesa l'equació (2.60):

$$\begin{cases} x_j = X_j \\ u_i(\mathbf{x}, t) = U_i(\mathbf{X}, t) \end{cases} \Rightarrow j_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = J_{ij} \Rightarrow \mathbf{j} = \mathbf{J} \quad (2.62)$$

i el tensor material de deformació resulta ser:

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \mathbf{J}^T \mathbf{J}) \cong \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) \\ E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\ll 1} \right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (2.63)$$

on s'ha tingut en compte el caràcter d'infinitèsim de segon ordre del terme $\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$. Operant similarment amb el tensor espacial de deformació:

$$\begin{cases} \mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T - \mathbf{j}^T \mathbf{j}) \cong \frac{1}{2}(\mathbf{j} + \mathbf{j}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) \\ e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \underbrace{\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{\ll 1} \right) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{cases} \quad (2.64)$$

Les equacions (2.63) i (2.64) permeten definir *el tensor de deformació infinitesimal* (o tensor de petites deformacions) $\boldsymbol{\varepsilon}$:

NOTACIÓ

Es defineix l'operador

gradient simètric ∇^s

mitjançant: $\nabla^s(\bullet) =$

$$\frac{1}{2}[(\bullet) \otimes \nabla + \nabla \otimes (\bullet)].$$

$$\begin{aligned} \text{Tensor de} & \quad \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)^{not} = \nabla^s \mathbf{u} \\ \text{deformació} & \rightarrow \\ \text{infinitesimal} & \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Observació 2-14

Sota la hipòtesi de deformació infinitesimal *els tensors material i espacial de deformació coincideixen* i col·lapsen en el *tensor de deformació infinitesimal*.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$$

Observació 2-15

El tensor de deformació infinitesimal és simètric, tal com s'observa de la seva definició en l'equació (2.65):

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) = \boldsymbol{\varepsilon}$$

Observació 2-16

Els components del tensor infinitesimal de deformació $\boldsymbol{\varepsilon}$ són infinitèsims ($\varepsilon_{ij} \ll 1$). La demostració és evident a partir de l'equació (2.65) i la condició d'infinitèsim dels components de $\mathbf{J} = \mathbf{j}$ (vegeu l'equació (2.61)).

Exemple 2-4 – Per al moviment de l'Exemple 2-1, determineu en quines condicions constitueix un cas de deformació infinitesimal. Per al cas esmentat, obteniu el tensor infinitesimal de deformació. Compareu-ho amb el resultat obtingut a partir dels tensors espacial i material de deformació de l'Exemple 2-2 considerant les hipòtesis de deformació infinitesimal.

- a) Les equacions de moviment vénen donades per
$$\begin{cases} x_1 = X_1 - AX_3 \\ x_2 = X_2 - AX_3 \\ x_3 = -AX_1 + AX_2 + X_3 \end{cases} \quad \text{de les}$$

quals s'obté el camp de desplaçaments:

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \equiv \begin{cases} U_1 = -AX_3 \\ U_2 = -AX_3 \\ U_3 = -AX_1 + AX_2 \end{cases} \quad \text{És evident que perquè els}$$

desplaçaments siguin infinitesimals s'ha de complir que A sigui un infinitèsim ($A \ll 1$).

- b) *Tensor de deformació:* El tensor gradient dels desplaçaments $\mathbf{J}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ vindrà donat per:

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \otimes \nabla = \begin{bmatrix} -AX_3 \\ -AX_3 \\ -AX_1 + AX_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & \frac{\partial}{\partial X_2} & \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & -A \\ -A & A & 0 \end{bmatrix}$$

i el tensor infinitesimal de deformació, d'acord amb l'equació (2.65), serà:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- c) *Tensors material i espacial de deformació:* A l'Exemple 2-2 els tensors material i espacial de deformació resulten ser, respectivament:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A^2 & -A^2 & -2A \\ -A^2 & A^2 & 0 \\ -2A & 0 & 2A^2 \end{bmatrix} \text{ i}$$

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3A^2 - 2A^4 & A^2 + 2A^4 & -2A - 2A^3 \\ A^2 + 2A^4 & A^2 - 2A^4 & 2A^3 \\ -2A - 2A^3 & 2A^3 & -2A^2 \end{bmatrix}$$

i negligint els infinitedsim de segon ordre o superior ($A^4 \ll A^3 \ll A^2 \ll A$) resulta:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -A \\ 0 & 0 & 0 \\ -A & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} = \mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

2.11.2 Estirament. Allargament unitari

Considerant la fórmula general (2.30) de l'estirament unitari en la direcció $\mathbf{T} \cong \mathbf{t}$ ($\lambda_t = \sqrt{1 + 2\mathbf{t} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{t}}$) i aplicant a aquest un desenvolupament en sèrie de Taylor al voltant de 0 (tenint en compte que $\mathbf{E} = \boldsymbol{\varepsilon}$ és infinitedsim i, per tant, també ho és $x = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}$), s'obté:

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_t &= \sqrt{1 + \underbrace{2\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t}}_x} \cong 1 + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t} \\ \varepsilon_t &= \lambda_t - 1 = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t} \end{aligned}} \quad (2.66)$$

2.11.3 Interpretació física de les deformacions infinitesimals

Considerem el tensor de deformacions infinitesimals $\boldsymbol{\varepsilon}$ i els seus components en el sistema de coordenades $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$ de la Figura 2-15:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

Considerem el segment diferencial \overline{PQ} orientat en la configuració de referència en la direcció de l'eix coordinat $x_1 \equiv x$. L'estirament λ_x i l'allargament unitari ε_x en la direcció esmentada vénen donats, d'acord amb l'equació (2.66) amb $\mathbf{t} = \{1, 0, 0\}^T$, per:

$$\lambda_x = 1 + \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{t} = 1 + \varepsilon_{xx} \Rightarrow \varepsilon_x = \lambda_x - 1 = \varepsilon_{xx} \quad (2.68)$$

Això permet donar a la component $\varepsilon_{xx} \equiv \varepsilon_{11}$ el significat físic de l'allargament unitari ε_x en la direcció de l'eix coordinat $x_1 \equiv x$. Una interpretació similar es pot donar als altres components de la diagonal principal del tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ($\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}$).

$$\boxed{\varepsilon_{xx} = \varepsilon_x \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_y \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_z} \quad (2.69)$$

RECORDATORI

El desenvolupament en sèrie de Taylor de

$\sqrt{1+x}$ en un entorn

de $x=0$ és:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x +$$

$$+ O(x^2)$$

Atesos ara els components de fora de la diagonal principal de $\boldsymbol{\varepsilon}$, considerem els segments diferencials \overline{PQ} i \overline{PR} orientats segons les direccions coordenades x i y en la configuració de referència formant, per tant, un angle $\Theta_{xy} = \frac{\pi}{2}$ en la configuració esmentada. Aplicant l'equació (2.43), l'increment de l'angle corresponent serà:

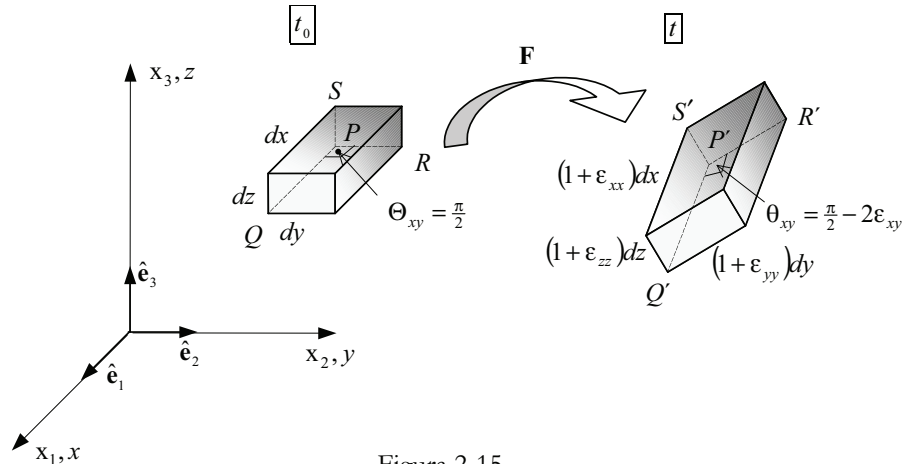


Figura 2-15

RECORDATORI

El desenvolupament en sèrie de Taylor de $\arcsin x$ en un entorn de $x=0$ és:

$$\arcsin x = x + O(x^2)$$

$$\Delta\theta_{xy} = \theta_{xy} - \frac{\pi}{2} = -2 \arcsin \frac{\varepsilon_{xy}}{\sqrt{1+2\varepsilon_{xx}} \sqrt{1+2\varepsilon_{yy}}} \cong -2 \arcsin \varepsilon_{xy} \approx -2\varepsilon_{xy} \quad (2.70)$$

on s'ha tingut en compte el caràcter infinitesimal de ε_{xx} , ε_{yy} i ε_{xy} . En conseqüència, de l'equació (2.70) ε_{xy} es pot interpretar *com menys el semiincrement, produït per la deformació, de l'angle entre dos segments diferencials orientats inicialment segons les direccions coordenades x i y* . Una interpretació anàloga es pot trobar per als altres components ε_{xz} i ε_{yz} :

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{xy} \quad ; \quad \varepsilon_{xz} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{xz} \quad ; \quad \varepsilon_{yz} = -\frac{1}{2}\Delta\theta_{yz} \quad (2.71)$$

2.11.4 Deformacions enginyerils. Vector de deformacions enginyerils

Hi ha una tradició important en enginyeria a fer servir una denominació particular per als components del tensor de deformació infinitesimal, la qual cosa constitueix la denominada *notació enginyeril*, en contraposició amb la *notació científica* usada generalment en mecànica de medis continus. Ambdues notacions es poden sintetitzar de la forma següent:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{matrix} \text{notació científica} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \text{notació científica} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \end{matrix} \equiv \begin{matrix} \text{notació enginyeril} \\ \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2.72)$$

Observació 2-17

Els components del tensor de deformació situats en la diagonal principal (*denominats deformacions longitudinals*) es denoten per $\varepsilon_{(\bullet)}$ i coincideixen amb els *allargaments unitaris en les direccions dels eixos coordenats*. Valors positius de les deformacions longitudinals ($\varepsilon_{(\bullet)} > 0$) corresponen a un augment de longitud dels segments diferencials corresponents en la configuració de referència.

Observació 2-18

Els components del tensor de deformació situats fora de la diagonal principal es caracteritzen pels valors $\gamma_{(\bullet,\bullet)}$ (*denominats deformacions angulars*) i es poden interpretar com *els decrements dels corresponents angles orientats segons les direccions cartesianes en la configuració de referència*. Valors positius de les deformacions angulars ($\gamma_{(\bullet,\bullet)} > 0$) indiquen que els angles corresponents *es tanquen* amb el procés de deformació.

És també molt freqüent en enginyeria aprofitar la simetria del tensor de deformació infinitesimal (vegeu l'Observació 2-15) per treballar únicament amb els sis components diferents de tensor esmentat reunint-les en el denominat *vector de deformacions enginyerils* definit com:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^6 \quad \boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z \\ \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{deformacions longitudinals} \\ \text{deformacions angulars} \end{array} \quad (2.73)$$

2.11.5 Variació de l'angle entre dos segments diferencials en deformació infinitesimal

Considerem dos segments diferencials qualssevol, \overline{PQ} i \overline{PR} , en la configuració de referència i l'angle Θ que defineixen (vegeu la Figura 2-16). Sigui

$\theta = \Theta + \Delta\theta$ l'angle format pels segments corresponents deformats en la configuració actual. Aplicant l'equació (2.42) al cas esmentat s'obté el següent:

$$\cos \theta = \cos(\Theta + \Delta\theta) = \frac{\mathbf{T}^{(1)} \cdot [\mathbf{1} + 2\boldsymbol{\epsilon}] \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sqrt{1 + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(1)}} \sqrt{1 + 2\mathbf{T}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}} \quad (2.74)$$

$\ll 1$ $\ll 1$

on $\mathbf{T}^{(1)}$ i $\mathbf{T}^{(2)}$ són els dos vectors unitaris en les direccions de \overline{PQ} i \overline{PR} i es compleix, per tant, que $\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)} = \|\mathbf{T}^{(1)}\| \|\mathbf{T}^{(2)}\| \cos \Theta = \cos \Theta$. Considerant el caràcter d'infinitèsim dels components de $\boldsymbol{\epsilon}$ i del mateix $\Delta\theta$ es compleix:

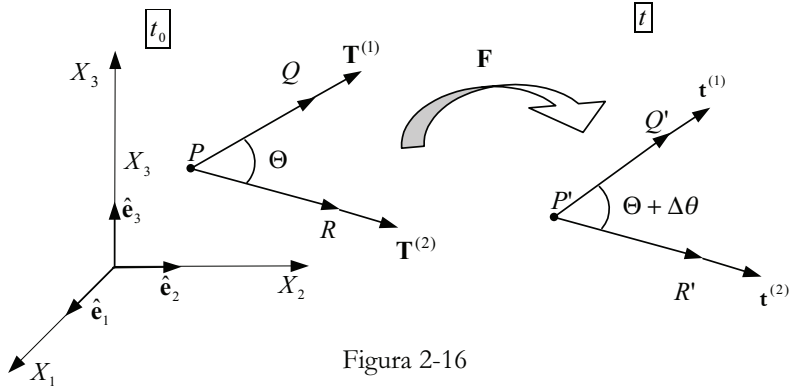


Figura 2-16

NOTA

Es consideren els següents desenvolupaments en sèrie de Taylor en un entorn de $x = 0$:

$$\sin x = x + O(x^2)$$

$$\cos x = 1 + O(x^2)$$

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \cos(\Theta + \Delta\theta) = \cos \Theta \cdot \underbrace{\cos \Delta\theta}_{\approx 1} - \sin \Theta \cdot \underbrace{\sin \Delta\theta}_{\approx \Delta\theta} = \\ &= \cos \Theta - \sin \Theta \cdot \Delta\theta = \frac{\overbrace{\mathbf{T}^{(1)} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}^{=\cos \Theta} + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\underbrace{\sqrt{1 + \mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(1)}}}_{\approx 1} \underbrace{\sqrt{1 + \mathbf{T}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}}_{\approx 1}} = \cos \Theta + 2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \quad (2.75) \\ &\Rightarrow \sin \Theta \cdot \Delta\theta = -2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Delta\theta = -\frac{2\mathbf{T}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{T}^{(2)}}{\sin \Theta} = -\frac{2\mathbf{t}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \cdot \mathbf{t}^{(2)}}{\sin \theta} \quad (2.76)$$

on s'ha considerat que, a causa del caràcter infinitesimal de la deformació, es compleix que $\mathbf{T}^{(1)} \approx \mathbf{t}^{(1)}$, $\mathbf{T}^{(2)} \approx \mathbf{t}^{(2)}$ i $\Theta \approx \theta$.

2.11.6 Descomposició polar

Per al cas general de deformació finita la descomposició polar del tensor gradient de la deformació \mathbf{F} ve donada per l'equació (2.49). Per al cas de deformació infinitesimal, recordant l'expressió (2.12) ($\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J}$) i el caràcter d'infinitèsim dels components del tensor \mathbf{J} (vegeu l'equació (2.61)), el tensor \mathbf{U} de l'equació (2.49) es pot escriure com segueix:

RECORDATORI

El desenvolupament en sèrie de Taylor del tensor $\sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{x}}$ en un entorn de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és:

$$\sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{x}} = \mathbf{1} + \frac{1}{2}\mathbf{x} + O(\mathbf{x}^2)$$

RECORDATORI

El desenvolupament en sèrie de Taylor del tensor $(\mathbf{1} + \mathbf{x})^{-1}$ en un entorn de $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ és:

$$(\mathbf{1} + \mathbf{x})^{-1} = \mathbf{1} - \mathbf{x} + O(\mathbf{x}^2)$$

NOTACIÓ

Es defineix l'operador gradient antisimètric ∇^a mitjançant: $\nabla^a(\bullet) = \frac{1}{2}[(\bullet) \otimes \nabla - \nabla \otimes (\bullet)]$

$$\mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \mathbf{F}} = \sqrt{(\mathbf{1} + \mathbf{J}^T) \cdot (\mathbf{1} + \mathbf{J})} = \sqrt{\mathbf{1} + \mathbf{J} + \mathbf{J}^T + \underbrace{\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{J}}_{\ll \mathbf{J}}} \approx \sqrt{\mathbf{1} + \underbrace{\mathbf{J} + \mathbf{J}^T}_{\mathbf{x}}} = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{U} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.77)$$

i, de forma similar, a causa del propi caràcter infinitesimal dels components de $\boldsymbol{\varepsilon}$ (vegeu l'Observació 2-16) resulta:

$$\mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{1} + \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{x}})^{-1} = \mathbf{1} - \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{1} - \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (2.78)$$

amb la qual cosa el tensor de rotació \mathbf{Q} de l'equació (2.49) es pot escriure com segueix:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{U}^{-1} = (\mathbf{1} + \mathbf{J}) \cdot \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) \right] = \mathbf{1} + \mathbf{J} - \frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T) - \underbrace{\frac{1}{2}\mathbf{J} \cdot (\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)}_{\ll \mathbf{J}} = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\Omega}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\Omega}} \quad (2.79)$$

L'equació (2.79) defineix el *tensor infinitesimal de rotació* $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\text{Tensor infinitesimal de rotació} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overset{\text{def}}{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla - \nabla \otimes \mathbf{u}) \overset{\text{def}}{=} \nabla^a \mathbf{u} \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \ll 1 \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad (2.80)$$

Observació 2-19

El tensor $\boldsymbol{\Omega}$ és un tensor antisimètric. En efecte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\Omega}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T)^T = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^T - \mathbf{J}) = -\boldsymbol{\Omega} \\ \Omega_{ji} = -\Omega_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right.$$

En conseqüència, $\boldsymbol{\Omega}$ tindrà nuls els termes de la seva diagonal principal, i la seva matriu de components tindrà l'estructura:

$$[\boldsymbol{\Omega}] = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

En el context de petites rotacions, el tensor $\boldsymbol{\Omega}$ és un tensor que caracteritza la rotació ($\mathbf{Q} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\Omega}$) i per això el nom de tensor infinitesimal de rotació. En tractar-se d'un tensor antisimètric queda definit mitjançant només tres components diferents ($\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12}$), dels quals es pot extreure el denominat *vector infinitesimal de rotació* $\boldsymbol{\theta}$:

NOTACIÓ

Es denota l'operador
rotacional de (\bullet)

mitjançant: $\nabla \times (\bullet)$

$$\text{Vector infinitesimal de rotació} \rightarrow \left\{ \boldsymbol{\theta} \equiv \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \right. \quad (2.81)$$

Les expressions (2.12), (2.65) i (2.79) permeten escriure:

$$\mathbf{F} = \mathbf{1} + \mathbf{J} = \mathbf{1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} + \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{J} - \mathbf{J}^T)}_{\boldsymbol{\Omega}} \Rightarrow \boxed{\mathbf{F} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega}} \quad (2.82)$$

Observació 2-20

Els resultats d'*aplicar escalarment el tensor de rotació infinitesimal $\boldsymbol{\Omega}$ i d'aplicar vectorialment el vector de rotació infinitesimal $\boldsymbol{\theta}$* a un vector qualsevol $\mathbf{r} \equiv [r_1, r_2, r_3]^T$ (vegeu la Figura 2-17) coincideixen. En efecte:

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{12}r_2 - \Omega_{31}r_3 \\ -\Omega_{12}r_1 + \Omega_{23}r_3 \\ \Omega_{31}r_1 - \Omega_{23}r_2 \end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ -\Omega_{23} & -\Omega_{31} & -\Omega_{12} \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Omega_{12}r_2 - \Omega_{31}r_3 \\ -\Omega_{12}r_1 + \Omega_{23}r_3 \\ \Omega_{31}r_1 - \Omega_{23}r_2 \end{Bmatrix}$$

En conseqüència, el vector $\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$ té les característiques següents:

- És ortogonal al vector \mathbf{r} (ja que és el resultat d'un producte vectorial en el qual intervé \mathbf{r}).
- El seu mòdul és infinitesimal (ja que $\boldsymbol{\theta}$ ho és).
- El vector $\mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$ es pot considerar, llevat en el cas d'infinitèsims d'ordre superior, el resultat d'*aplicar una rotació $\boldsymbol{\theta}$* al vector \mathbf{r} .

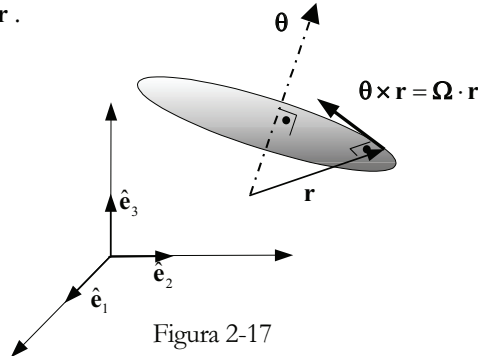


Figura 2-17

Considerem ara un segment diferencial $d\mathbf{X}$ en l'entorn diferencial d'una partícula P en la configuració de referència (vegeu la Figura 2-18). D'acord amb l'equació (2.82) la deformació transforma el vector esmentat en el vector $d\mathbf{x}$:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{X} = \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot d\mathbf{X}}_{\text{deformació}} + \underbrace{(\mathbf{1} + \boldsymbol{\Omega}) \cdot d\mathbf{X}}_{\text{rotació}} \quad (2.83)$$

$$\mathbf{F}(\bullet) \equiv \text{deformació}(\bullet) + \text{rotació}(\bullet)$$

Observació 2-21

En règim de deformació infinitesimal l'equació (2.83) caracteritza el moviment relatiu a una partícula, en un entorn diferencial d'aquesta, com la suma del següent:

- Una *deformació pròpiament dita*, caracteritzada pel tensor infinitesimal de deformació $\boldsymbol{\varepsilon}$.
- Una *rotació* caracteritzada pel tensor infinitesimal de rotació $\boldsymbol{\Omega}$ que (en el context de petites rotacions) manté angles i distàncies.

La *superposició* (deformació + rotació) del cas general de deformació finita (vegeu l'Observació 2-12) degenera, per al cas de deformació infinitesimal, en una simple *addició* (deformació + rotació).

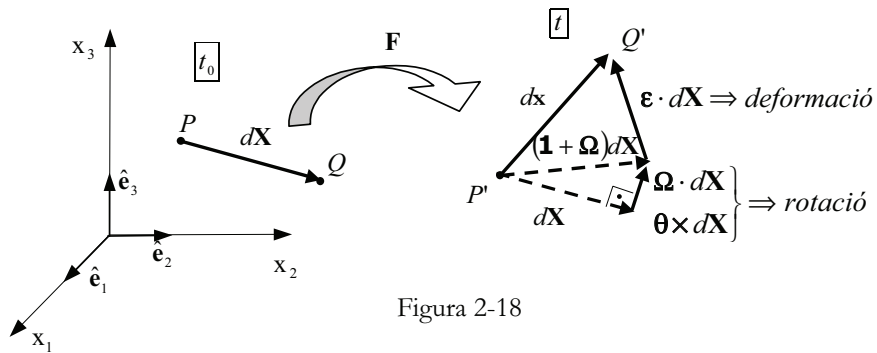


Figura 2-18

2.12 Deformació volumètrica

Definició

Deformació volumètrica: Increment, produït per la deformació, del volum associat a una partícula, per unitat de volum en la configuració de referència.

La definició anterior es pot expressar matemàticament com (vegeu la Figura 2-19):

$$\text{def. volumètrica} \rightarrow e(\mathbf{X}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dV(\mathbf{X}, t) - dV(\mathbf{X}, 0)}{dV(\mathbf{X}, 0)} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{dV_t - dV_0}{dV_0} \quad (2.84)$$

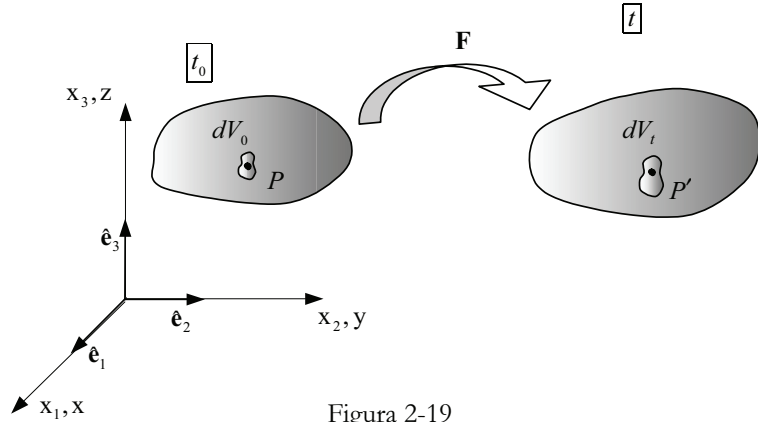


Figura 2-19

L'equació (2.55) ($dV_t = |\mathbf{F}|_t dV_0$) permet expressar, al seu torn, la deformació volumètrica en els termes següents:

- *Deformació finita*

$$e = \frac{dV_t - dV_0}{dV_0} = \frac{|\mathbf{F}|_t dV_0 - dV_0}{dV_0} \Rightarrow \boxed{e = |\mathbf{F}| - 1} \quad (2.85)$$

- *Deformació infinitesimal*

Considerant l'equació (2.49) ($\mathbf{F} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}$) i recordant que \mathbf{Q} és un tensor ortogonal ($|\mathbf{Q}| = 1$) es pot escriure:

$$|\mathbf{F}| = |\mathbf{Q} \cdot \mathbf{U}| = |\mathbf{Q}| |\mathbf{U}| = |\mathbf{U}| = |\mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}| = \det \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & 1 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & 1 + \epsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.86)$$

on s'ha tingut en compte l'equació (2.77) ($\mathbf{U} = \mathbf{1} + \boldsymbol{\epsilon}$). Considerant ara que els components de $\boldsymbol{\epsilon}$ són infinitèsims, i menyspreant en l'expressió del seu determinant els infinitèsims d'ordre superior a u, es pot escriure:

$$|\mathbf{F}| = \det \begin{vmatrix} 1 + \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} & 1 + \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} & \epsilon_{yz} & 1 + \epsilon_{zz} \end{vmatrix} = 1 + \underbrace{\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}}_{Tr(\boldsymbol{\epsilon})} + O(\epsilon^2) \approx 1 + Tr(\boldsymbol{\epsilon}) \quad (2.87)$$

i substituint l'equació (2.87) en la (2.85) s'obté, per al cas de deformació infinitesimal:

$$\left. \begin{aligned} dV_t &= (1 + \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}))dV_0 \\ e &= \frac{dV_t - dV_0}{dV_0} = |\mathbf{F}| - 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{e = \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon})} \quad (2.88)$$

2.13 Velocitat de deformació

A les seccions anteriors d'aquest capítol s'ha estudiat el concepte *deformació* entès com la variació de la posició relativa (angles i distàncies) de les partícules a l'entorn d'una de determinada. Als apartats següents, considerarem la velocitat a què es modifica aquesta posició relativa introduint el concepte de *velocitat de deformació* com una mesura de la variació de la posició relativa entre partícules per unitat de temps.

2.13.1 Tensor gradient de la velocitat

Considerant la configuració corresponent en l'instant t , siguin dues partícules del medi continu P i Q que ocupen els punts espacials P' i Q' en l'instant esmentat (vegeu la Figura 2-20), les seves velocitats, $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{v}_Q = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t)$ i la seva velocitat relativa:

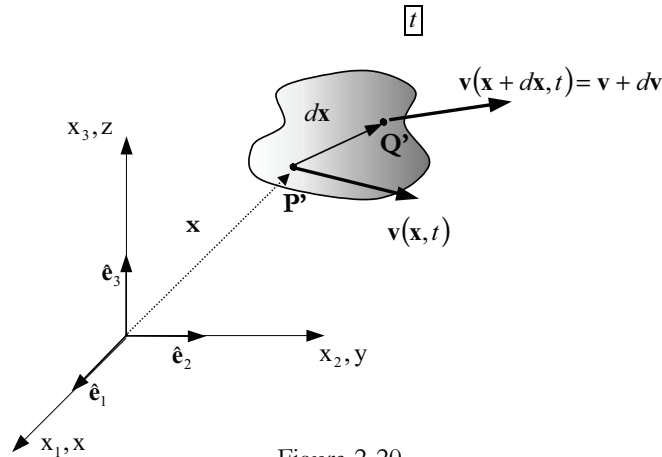


Figura 2-20

$$d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_Q - \mathbf{v}_P = \mathbf{v}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.89)$$

amb la qual es pot escriure:

$$\begin{aligned} d\mathbf{v} &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}}_{\mathbf{l}} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x} \\ d v_i &= \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_j}}_{l_{ij}} dx_j = l_{ij} dx_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (2.90)$$

En l'equació (2.90) s'ha introduït el denominat tensor *gradient espacial de la velocitat* $\mathbf{l}(\mathbf{x}, t)$ definit com:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor gradient} \\ \text{espacial de la} \\ \text{velocitat} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{l}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{l} = \mathbf{v} \otimes \nabla \\ l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (2.91)$$

2.13.2 Tensor velocitat de deformació i tensor espín

RECORDATORI

Tot tensor de segon ordre, \mathbf{a} , es pot descompondre en la suma de la seva part simètrica ($\text{sym}(\mathbf{a})$) i antisimètrica $\text{skew}(\mathbf{a})$ de la forma:

$$\mathbf{a} = \text{sym}(\mathbf{a}) + \text{skew}(\mathbf{a})$$

$$\text{sym}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{a}^T}{2}$$

$$\text{skew}(\mathbf{a}) = \frac{\mathbf{a} - \mathbf{a}^T}{2}$$

Descomponent el tensor gradient de la velocitat en les seves parts simètrica i antisimètrica:

$$\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w} \quad (2.92)$$

on \mathbf{d} és un tensor simètric denominat *tensor velocitat de deformació*:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor} \\ \text{velocitat de} \\ \text{deformació} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{d} \stackrel{\text{def}}{=} \text{sym}(\mathbf{l}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v}) \stackrel{\text{not}}{=} \nabla^s \mathbf{v} \\ d_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \\ [\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{23} & d_{33} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.93)$$

i \mathbf{w} és un tensor asimètric denominat *tensor velocitat de rotació o tensor espín*, l'expressió del qual és:

$$\begin{array}{l} \text{Tensor} \\ \text{velocitat de} \\ \text{rotació (espín)} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{w} \stackrel{\text{def}}{=} \text{skew}(\mathbf{l}) = \frac{1}{2}(\mathbf{l} - \mathbf{l}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{v} \otimes \nabla - \nabla \otimes \mathbf{v}) \stackrel{\text{not}}{=} \nabla^a \mathbf{v} \\ w_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \\ [\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & w_{12} & -w_{31} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} \\ w_{31} & -w_{23} & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.94)$$

2.13.3 Interpretació física del tensor velocitat de deformació

Considerem el segment diferencial definit per les partícules P i Q de la Figura 2-21 i la variació del quadrat de la seva longitud al llarg del temps:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} ds^2 &= \frac{d}{dt} (d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x}) = \frac{d}{dt} (d\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot \frac{d}{dt} (d\mathbf{x}) = \\
&= d \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)}_{\mathbf{v}} \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot d \underbrace{\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)}_{\mathbf{v}} = d\mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{2.95}$$

i utilitzant les relacions (2.90) ($d\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}$) i (2.93) ($\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)$) s'obté de l'equació (2.95):

$$\frac{d}{dt} ds^2 = (d\mathbf{x} \cdot \mathbf{l}^T) \cdot d\mathbf{x} + d\mathbf{x} \cdot (\mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}) = d\mathbf{x} \cdot \left[\frac{\mathbf{l}^T + \mathbf{l}}{2} \right] \cdot d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\mathbf{x} \tag{2.96}$$

Considerant ara l'equació (2.20) ($ds^2 - dS^2 = 2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E} \cdot d\mathbf{X}$) derivant-la respecte al temps i tenint en compte l'equació (2.96):

$$\begin{aligned}
2d\mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\mathbf{x} &= \frac{d}{dt} ds^2(t) = \frac{d}{dt} (ds^2(t) - dS^2) = \\
\frac{d}{dt} (2d\mathbf{X} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X}) &= 2d\mathbf{X} \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{E}}{dt}}_{\dot{\mathbf{E}}} \cdot d\mathbf{X} = 2d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{X}
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Substituint ara l'equació (2.2) ($d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X}$) en la (2.97) s'obté el següent:

$$\begin{aligned}
d\mathbf{X} \cdot \dot{\mathbf{E}} \cdot d\mathbf{X} &= d\mathbf{x} \cdot \mathbf{d} \cdot d\mathbf{x} = [d\mathbf{x}]^T [\mathbf{d}] \cdot [d\mathbf{x}] = d\mathbf{X} \cdot [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}] \cdot d\mathbf{X} \\
\Rightarrow d\mathbf{X} \cdot [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} - \dot{\mathbf{E}}] \cdot d\mathbf{X} &= 0 \quad \forall d\mathbf{X} \Rightarrow [\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} - \dot{\mathbf{E}}] = \mathbf{0} \Rightarrow
\end{aligned} \tag{2.98}$$

$$\boxed{\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}}$$

NOTA

S'utilitza aquí el teorema de l'àlgebra tensorial següent: donat un tensor de segon ordre \mathbf{A} , si es verifica que $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = 0$ per a tot vector $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, llavors $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0}$.

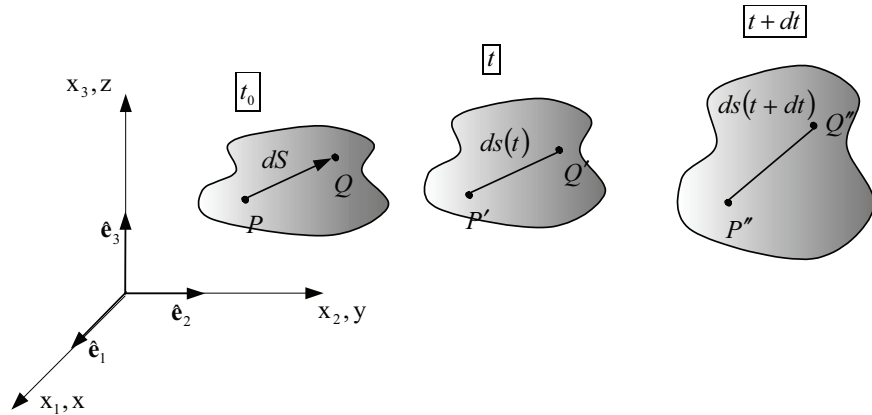


Figura 2-21

Observació 2-22

L'equació (2.98) posa de manifest la relació existent entre el tensor velocitat de deformació $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ i la derivada material del tensor material de deformació $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t)$, proporcionant una interpretació física (i justificant-ne la denominació) per al tensor $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$. Tanmateix, de l'equació esmentada es desprèn que els tensors $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ i $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t)$ no són exactament el mateix. Tots dos tensors coincidiran exactament en els casos següents:

- En la configuració de referència ($t = t_0 \Rightarrow \mathbf{F}|_{t=t_0} = \mathbf{1}$).
- En la teoria de deformació infinitesimal ($\mathbf{x} \approx \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \approx \mathbf{1}$).

2.13.4 Interpretació física del tensor velocitat de rotació \mathbf{w}

Partint de l'equació (2.94) i en ser \mathbf{w} un tensor antisimètric (definit, per tant, mitjançant només tres components diferents), es pot extreure d'aquest el vector:

NOTA

Observeu la similitud en l'estructura dels tensors $\boldsymbol{\Omega}$ i $\boldsymbol{\theta}$ de la secció 2.11.6 i els tensors \mathbf{w} i $\boldsymbol{\omega}$.

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ -\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3}\right) \\ -\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -w_{23} \\ -w_{31} \\ -w_{12} \end{bmatrix} \quad (2.99)$$

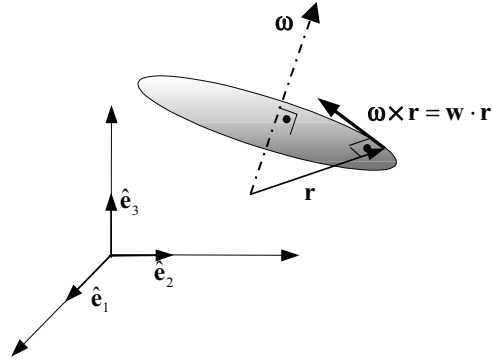


Figura 2-22

El vector $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ s'anomena *vector vorticitat*. És possible demostrar (la demostració és totalment anàloga a la de la Observació 2-20) que es compleix la igualtat següent:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r} \quad \forall \mathbf{r} \quad (2.100)$$

i que, per tant, és possible caracteritzar $\boldsymbol{\omega}$ com la velocitat angular d'un moviment de rotació, i $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{r}$ com la velocitat de rotació d'aquell punt

que té \mathbf{r} com a vector de posició respecte al centre de rotació (vegeu la Figura 2-22). A partir d'aquí, i considerant les equacions (2.90) ($d\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x}$) i (2.92) ($\mathbf{l} = \mathbf{d} + \mathbf{w}$), es pot escriure:

$$d\mathbf{v} = \mathbf{l} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{d} + \mathbf{w}) \cdot d\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{d} \cdot d\mathbf{x}}_{\text{velocitat d'estirament}} + \underbrace{\mathbf{w} \cdot d\mathbf{x}}_{\text{velocitat de rotació}} \quad (2.101)$$

Això permet descriure la velocitat relativa $d\mathbf{v}$ de les partícules en l'entorn d'una determinada P (vegeu la Figura 2-23) com la *suma* d'una *velocitat relativa d'estirament* (caracteritzada pel tensor velocitat de deformació \mathbf{d}) i una *velocitat relativa de rotació* (caracteritzada pel tensor espín \mathbf{w} o el vector vorticitat $2\boldsymbol{\omega}$).

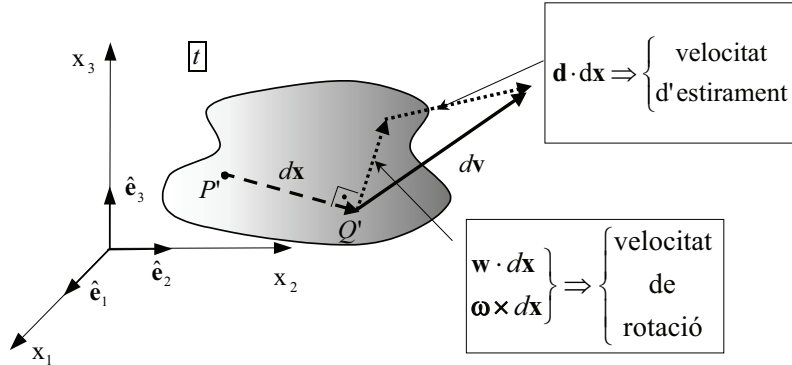


Figura 2-23

2.14 Derivades materials dels tensors de deformació i altres magnituds

2.14.1 Tensor gradient de la deformació \mathbf{F} i gradient de la deformació invers \mathbf{F}^{-1}

Derivant respecte al temps l'expressió de \mathbf{F} en l'equació (2.3)

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} \Rightarrow \frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \underbrace{\frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t}}_{\dot{x}_i} = \frac{\partial v_i(\mathbf{X}, t)}{\partial X_j} = \\ &= \underbrace{\frac{\partial v_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t))}{\partial x_k}}_{l_{ik}} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial X_j}}_{F_{kj}} = l_{ik} F_{kj} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.102)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dF_{ij}}{dt} &= \dot{F}_{ij} = l_{ik} F_{kj} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \\ \frac{d\mathbf{F}}{dt} &\stackrel{not}{=} \dot{\mathbf{F}} = \mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \end{aligned} \right.$$

NOTA

S'utilitza aquí el teorema d'igualtat de derivades creuades per a funcions regulars:

$$\frac{\partial^2(\bullet)}{\partial \mu_i \partial \mu_j} = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial \mu_j \partial \mu_i}$$

on s'ha tingut en compte l'expressió (2.91) per al tensor gradient de la velocitat \mathbf{l} . Per obtenir la derivada material del tensor \mathbf{F}^{-1} es deriva la identitat següent:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{1} &\Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F} \cdot \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} = \mathbf{0} \\ \Rightarrow \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} &= -\mathbf{F}^{-1} \cdot \underbrace{\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{l} \cdot \mathbf{F}} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \underbrace{\mathbf{l} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{\mathbf{1}} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l} \Rightarrow\end{aligned}\quad (2.103)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt} = -\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l} \\ \frac{dF_{ij}^{-1}}{dt} = -F_{ik}^{-1} l_{kj} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right.$$

NOTA

No s'ha de confondre la derivada material del tensor invers $\frac{d(\mathbf{F}^{-1})}{dt}$ amb l'invers de la derivada material del tensor: $(\dot{\mathbf{F}})^{-1}$. Tots dos tensors són diferents.

2.14.2 Tensors de deformació \mathbf{E} i \mathbf{e}

De les equacions (2.21), (2.102) i (2.93):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1}) &\Rightarrow \frac{d\mathbf{E}}{dt} = \dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \left(\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \dot{\mathbf{F}} \right) = \\ \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{l}^T \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}) &= \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \cdot \underbrace{(\mathbf{l} + \mathbf{l}^T)}_{2\mathbf{d}} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F} \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{E}} &= \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{F}\end{aligned}\quad (2.104)$$

NOTA

Observeu que el resultat és el mateix que l'obtingut en l'equació (2.98) per un procediment alternatiu.

Per al tensor espacial de deformació \mathbf{e} , de les equacions (2.23) i (2.103) s'obté el següent:

$$\begin{aligned}\mathbf{e} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1}) &\Rightarrow \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \dot{\mathbf{e}} = -\frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{-1}) \right) \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{l}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}^{-1}) \\ \Rightarrow \dot{\mathbf{e}} &= \frac{1}{2}(\mathbf{l}^T \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{l} \cdot \mathbf{F}^{-1})\end{aligned}\quad (2.105)$$

2.14.3 Derivades materials de diferencials de volum i d'àrea

El diferencial de volum $dV(\mathbf{X}, t)$ associat a una determinada partícula, P , varia al llarg del temps (vegeu la Figura 2-24) i, en conseqüència, té sentit calcular la seva derivada material. Derivant l'expressió (2.55) per al diferencial de volum:

$$dV(\mathbf{X}, t) = |\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)| dV_0(\mathbf{X}) \Rightarrow \frac{d}{dt} dV(t) = \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} dV_0 \quad (2.106)$$

amb la qual cosa la derivada material del determinant del tensor gradient de la deformació $|\mathbf{F}|$ resulta:

NOTA

La derivada del determinant d'un tensor \mathbf{A} , respecte al tensor mateix, es pot escriure com:

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{d\mathbf{A}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-T}$$

$$\frac{d|\mathbf{A}|}{dA_{ij}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{A}^{-1}_{ji}$$

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} &= \frac{d|\mathbf{F}|}{dF_{ij}} \frac{dF_{ij}}{dt} = |\mathbf{F}| F_{ji}^{-1} \underbrace{\frac{dF_{ij}}{dt}}_{\mathbf{l}_{ik} F_{kj}} = |\mathbf{F}| \underbrace{F_{kj} F_{ji}^{-1}}_{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1})_{ki} = \delta_{ki}} \mathbf{l}_{ik} = |\mathbf{F}| \delta_{ki} \mathbf{l}_{ik} \\ &= |\mathbf{F}| l_{ii} = |\mathbf{F}| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = |\mathbf{F}| \nabla \cdot \mathbf{v} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.107)$$

$$\boxed{\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}| \nabla \cdot \mathbf{v}}$$

on s'han tingut en compte les expressions (2.102) i (2.91). Substituint ara l'equació (2.107) en la (2.106) s'obté finalment, després de considerar l'equació (2.55):

$$\frac{d}{dt}(dV) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) \underbrace{|\mathbf{F}| dV_0}_{dV} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV \quad (2.108)$$

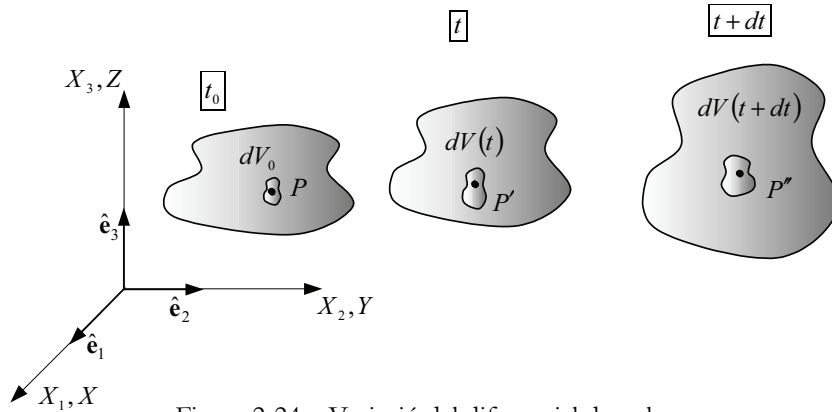


Figura 2-24 – Variació del diferencial de volum

Es pot operar de forma similar per obtenir la derivada material del diferencial d'àrea associat a una partícula determinada P i a una direcció \mathbf{n} (vegeu la Figura 2-25). El vector diferencial d'àrea associat a la partícula en la configuració de referència, $d\mathbf{A}(\mathbf{X}) = dA \mathbf{N}$, i en la configuració actual, $d\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = da \mathbf{n}$, estan relacionats per $d\mathbf{a} = |\mathbf{F}| \cdot d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ (vegeu l'equació (2.59)) i derivant l'expressió esmentada:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(d\mathbf{a}) &= \frac{d}{dt}(|\mathbf{F}| \cdot d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \underbrace{\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{|\mathbf{F}| \nabla \cdot \mathbf{v}} + |\mathbf{F}| \cdot d\mathbf{A} \underbrace{\frac{d}{dt}(\mathbf{F}^{-1})}_{-\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}} = \\ &= (\nabla \cdot \mathbf{v}) \underbrace{|\mathbf{F}| d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1}}_{d\mathbf{a}} - \underbrace{|\mathbf{F}| d\mathbf{A} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{l}}_{d\mathbf{a}} \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.109)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}(d\mathbf{a}) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) d\mathbf{a} - d\mathbf{a} \cdot \mathbf{l} = d\mathbf{a} \cdot ((\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbf{1} - \mathbf{l})}$$

on s'han considerat les equacions (2.103) i (2.107).

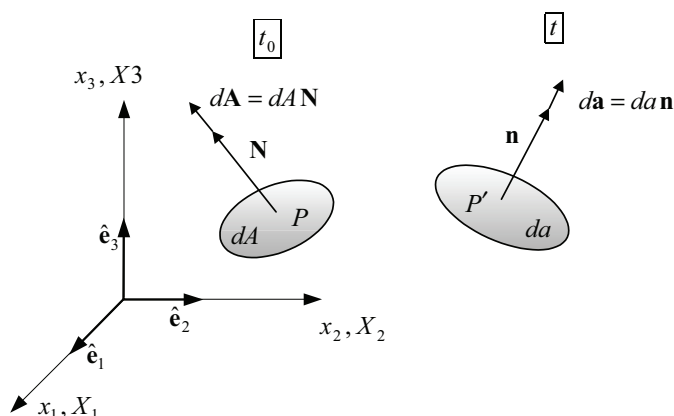


Figura 2-25 – Variació del diferencial d'àrea

2.15 Moviments i deformacions en coordenades cilíndriques i esfèriques

Les expressions i equacions obtingudes en notació intrínseca o compacta són independents del sistema de coordenades considerat. Tanmateix, les expressions en components depenen del sistema de coordenades en què es treballa. A més del *sistema de coordenades cartesianes*, en el qual s'ha treballat en els apartats anteriors, considerarem ara dos sistemes de coordenades curvilínies ortogonals: *coordenades cilíndriques* i *coordenades esfèriques*.

Observació 2-23

Un sistema de coordenades curvilínies ortogonals (denominades genèricament $\{a, b, c\}$, ve caracteritzat per la seva base física $\{\hat{\mathbf{e}}_a, \hat{\mathbf{e}}_b, \hat{\mathbf{e}}_c\}$ unitària ($\|\hat{\mathbf{e}}_a\| = \|\hat{\mathbf{e}}_b\| = \|\hat{\mathbf{e}}_c\| = 1$) els components del qual són ortogonals entre si ($\hat{\mathbf{e}}_a \cdot \hat{\mathbf{e}}_b = \hat{\mathbf{e}}_a \cdot \hat{\mathbf{e}}_c = \hat{\mathbf{e}}_b \cdot \hat{\mathbf{e}}_c = 0$), tal com passa amb un sistema cartesianes. La diferència fonamental és que l'orientació de la base curvilínia va canviant en cada punt de l'espai ($\hat{\mathbf{e}}_m \equiv \hat{\mathbf{e}}_m(\mathbf{x})$ $m \in \{a, b, c\}$). Així doncs, als efectes que ens interessin aquí, podem considerar un sistema de coordenades curvilínies ortogonals com un *sistema de coordenades cartesianes mòbil* $\{x', y', z'\}$ associat a la base curvilínia $\{\hat{\mathbf{e}}_a, \hat{\mathbf{e}}_b, \hat{\mathbf{e}}_c\}$ (vegeu la Figura 2-26).

Observació 2-24

Els components, d'una certa magnitud de caràcter vectorial (\mathbf{v}) o tensorial (\mathbf{T}) en el sistema de coordenades curvilínies ortogonals $\{a, b, c\}$, es podran obtenir *com els seus components respectius en el sistema cartesianes local* $\{x', y', z'\}$:

$$\mathbf{v} \equiv \begin{Bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} v_{x'} \\ v_{y'} \\ v_{z'} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T} \equiv \begin{bmatrix} T_{aa} & T_{ab} & T_{ac} \\ T_{ba} & T_{bb} & T_{bc} \\ T_{ca} & T_{cb} & T_{cc} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} T_{x'x'} & T_{x'y'} & T_{x'z'} \\ T_{y'x'} & T_{y'y'} & T_{y'z'} \\ T_{z'x'} & T_{z'y'} & T_{z'z'} \end{bmatrix}$$

Observació 2-25

Els components curvilinis dels operadors diferencials (l'operador ∇ i els seus derivats) *no són iguals* als seus components en el sistema coordinat local $\{x', y', z'\}$ i s'han d'obtenir específicament per a cada cas. El seu valor per a coordenades cilíndriques i esfèriques es proporciona a l'apartat corresponent.

2.15.1 Coordenades cilíndriques

La posició d'un cert punt a l'espai es pot definir mitjançant les seves coordenades cilíndriques $\{r, \theta, z\}$ (vegeu la Figura 2-26). En la figura esmentada es presenta també la base física ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z$. Aquesta base canvia en cada punt de l'espai d'acord amb:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r \quad (2.110)$$

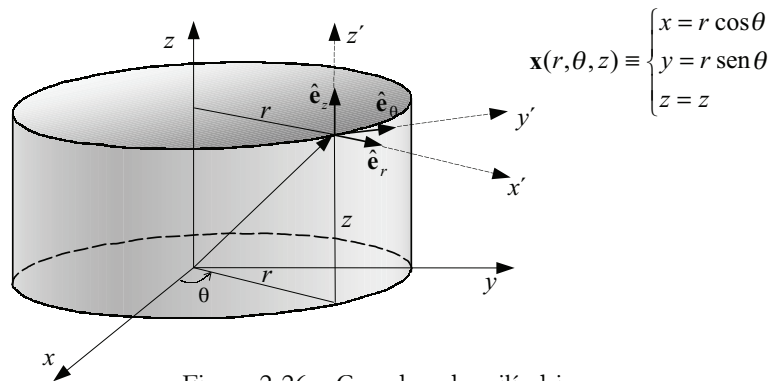


Figura 2-26 – Coordenades cilíndriques

En la Figura 2-27 es presenta l'element diferencial corresponent.

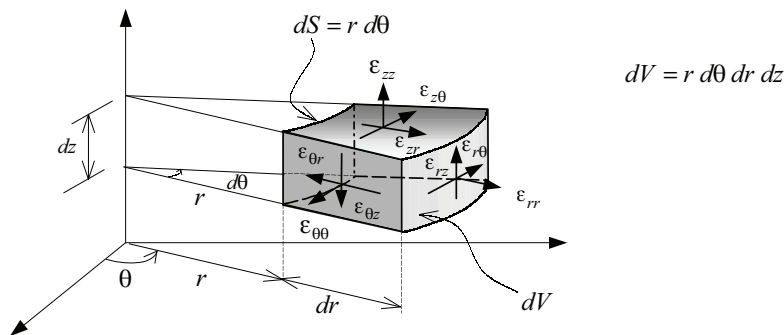


Figura 2-27 – Element diferencial en coordenades cilíndriques

Les expressions en coordenades cilíndriques d'alguns dels elements tractats en aquest capítol són:

- **Operador nabla**

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z \Rightarrow \nabla \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.111)$$

- **Vector de desplaçaments \mathbf{u} i vector velocitat \mathbf{v}**

$$\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + u_z \hat{\mathbf{e}}_z \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{bmatrix} \quad (2.112)$$

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_z \hat{\mathbf{e}}_z \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} \quad (2.113)$$

- **Tensor infinitesimal de deformació $\boldsymbol{\varepsilon}$**

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \{ [\mathbf{u} \otimes \nabla] + [\mathbf{u} \otimes \nabla]^T \} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_{x'x'} & \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{x'z'} \\ \varepsilon_{x'y'} & \varepsilon_{y'y'} & \varepsilon_{y'z'} \\ \varepsilon_{x'z'} & \varepsilon_{y'z'} & \varepsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{rr} & \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{rz} \\ \varepsilon_{r\theta} & \varepsilon_{\theta\theta} & \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{rz} & \varepsilon_{\theta z} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.114)$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \quad \varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)$$

En la Figura 2-27 es presenten els components de $\boldsymbol{\varepsilon}$ sobre l'element diferencial corresponent.

- **Tensor velocitat de deformació \mathbf{d}**

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \{ [\mathbf{v} \otimes \nabla] + [\mathbf{v} \otimes \nabla]^T \} \equiv \begin{bmatrix} d_{x'x'} & d_{x'y'} & d_{x'z'} \\ d_{x'y'} & d_{y'y'} & d_{y'z'} \\ d_{x'z'} & d_{y'z'} & d_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{rz} \\ d_{r\theta} & d_{\theta\theta} & d_{\theta z} \\ d_{rz} & d_{\theta z} & d_{zz} \end{bmatrix}$$

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \quad d_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (2.115)$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right] \quad d_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)$$

$$d_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \right)$$

2.15.2 Coordenades esfèriques

Un punt de l'espai està definit per les seves coordenades esfèriques $\{r, \theta, \phi\}$.

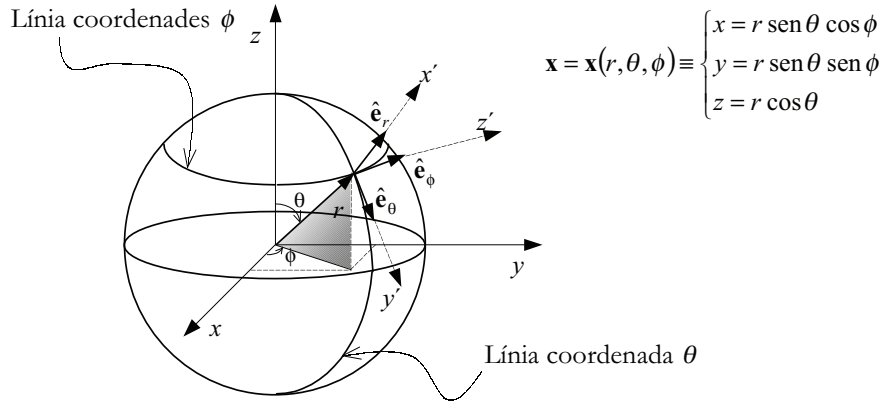


Figura 2-28 – Coordenades esfèriques

En la Figura 2-28 es presenta la base física ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi$. Aquesta base canvia en cada punt de l'espai d'acord amb el següent:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_r \quad \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \theta} = \mathbf{0} \quad (2.116)$$

- **Operador nabla**

$$\nabla = \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} \Rightarrow \nabla \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{bmatrix} \quad (2.117)$$

- **Vector de desplaçaments \mathbf{u} i vector velocitat \mathbf{v}**

$$\mathbf{u} = u_r \hat{\mathbf{e}}_r + u_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + u_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \Rightarrow \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_\phi \end{bmatrix} \quad (2.118)$$

$$\mathbf{v} = v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \Rightarrow \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\phi \end{bmatrix} \quad (2.119)$$

- Tensor infinitesimal de deformació ϵ

$$\epsilon = \frac{1}{2} \{ [\mathbf{u} \otimes \nabla] + [\mathbf{u} \otimes \nabla]^T \} \equiv \begin{bmatrix} \epsilon_{x'x'} & \epsilon_{x'y'} & \epsilon_{x'z'} \\ \epsilon_{x'y'} & \epsilon_{y'y'} & \epsilon_{y'z'} \\ \epsilon_{x'z'} & \epsilon_{y'z'} & \epsilon_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon_{rr} & \epsilon_{r\theta} & \epsilon_{r\phi} \\ \epsilon_{\theta r} & \epsilon_{\theta\theta} & \epsilon_{\theta\phi} \\ \epsilon_{\phi r} & \epsilon_{\phi\theta} & \epsilon_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\theta}{r} \cot \phi + \frac{u_r}{r} \quad (2.120)$$

$$\epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right] \quad \epsilon_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} - \frac{u_\phi}{r} \right]$$

$$\epsilon_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \frac{u_\phi}{r} \cot \phi \right]$$

En la Figura 2-29 es presenten els components de ϵ sobre l'element diferencial corresponent.

- Tensor velocitat de deformació \mathbf{d}

$$\mathbf{d} = \frac{1}{2} \{ [\mathbf{v} \otimes \nabla] + [\mathbf{v} \otimes \nabla]^T \} \equiv \begin{bmatrix} d_{x'x'} & d_{x'y'} & d_{x'z'} \\ d_{x'y'} & d_{y'y'} & d_{y'z'} \\ d_{x'z'} & d_{y'z'} & d_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\theta} & d_{r\phi} \\ d_{\theta r} & d_{\theta\theta} & d_{\theta\phi} \\ d_{\phi r} & d_{\phi\theta} & d_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

$$d_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad d_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r}$$

$$d_{\phi\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r} \cot \phi + \frac{v_r}{r} \quad (2.121)$$

$$d_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right] \quad d_{r\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{v_\phi}{r} \right]$$

$$d_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\phi}{r} \cot \phi \right]$$

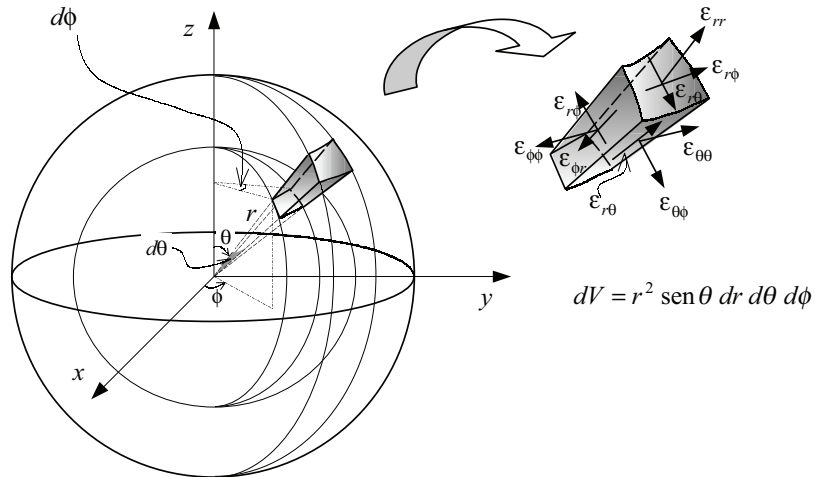


Figura 2-29 – Element diferencial en coordenades esfèriques

3 Equacions de compatibilitat

3.1 Introducció

Donat un camp de desplaçaments $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)$ suficientment regular, sempre és possible trobar el camp de deformacions corresponent (per exemple, el de Green-Lagrange) mitjançant derivació d'aquest respecte a les coordenades (en aquest cas materials):

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} + \frac{\partial U_k}{\partial X_i} \frac{\partial U_k}{\partial X_j} \right) \stackrel{not}{=} \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i} + U_{k,i} U_{k,j}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.1)$$

En cas de deformacions infinitesimals, donat el camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, el camp de deformacions s'obté de la manera següent:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \stackrel{not}{=} \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.2)$$

Es pot plantejar la pregunta en forma inversa, és a dir: donat un camp de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, és possible trobar un camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ de manera que $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ sigui el seu tensor infinitesimal de deformació? Això no sempre és possible i la resposta la proporcionen les *equacions de compatibilitat*.

L'expressió (3.2) constitueix un sistema de 6 (per la simetria) equacions diferencials en derivades parcials (EDP) amb 3 incògnites $u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t), u_3(\mathbf{x}, t)$. Aquest sistema està sobredeterminat, ja que existeixen més condicions que incògnites i pot no tenir solució.

Per tant, per tal que un tensor simètric de segon ordre $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ correspongui a un tensor de deformacions (i que, per tant, sigui integrable i existeixi un camp de desplaçaments del qual provingui) cal que verifiqui unes determinades condicions. Aquestes condicions s'anomenen condicions o equacions de compatibilitat i garanteixen la *continuitat* del medi continu durant el procés de deformació (vegeu la Figura 3-1).

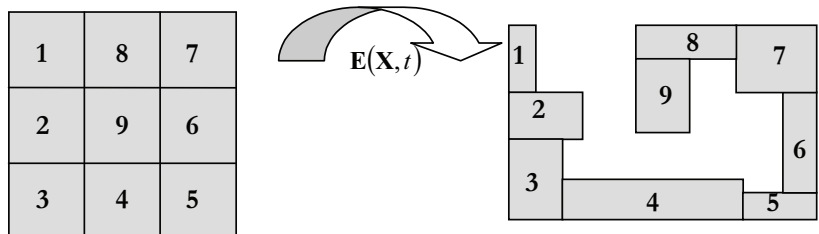


Figura 3-1 – Camp de deformacions no compatible

NOTACIÓ

Aquí es fa servir la notació simplificada:

$$\frac{\partial U_i}{\partial X_j} \stackrel{not}{=} U_{i,j}$$

Definició

Condicions de compatibilitat: Són les condicions que ha de verificar un tensor simètric de segon ordre perquè pugui ser un tensor de deformació i que, per tant, existeixi un camp de desplaçaments del qual provingui.

Observació 3-1

Observeu que per definir un tensor de deformació no es poden escriure de forma arbitrària els 6 components d'un tensor simètric. Cal que aquests verifiquin les condicions de compatibilitat.

Observació 3-2

Donat un camp de desplaçaments, sempre podem obtenir, per derivació, un tensor de deformació associat a aquest que verificarà automàticament les condicions de compatibilitat. Així doncs, en aquest cas no té sentit la verificació d'aquestes condicions.

3.2 Exemple preliminar: equacions de compatibilitat d'un camp vectorial potencial

Donat un camp vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, es diu que és un *camp potencial* si existeix una funció escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ (anomenada funció potencial) de manera que el seu gradient sigui $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, és a dir:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \\ v_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.3)$$

Per tant, donada una funció escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ (contínua), sempre és possible definir un camp vectorial *potencial* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ del qual aquella sigui el potencial d'acord amb l'equació (3.3).

La qüestió que es planteja ara és la inversa: donat un camp vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, existeix una funció escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ tal que $\nabla \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$? En components, això s'escriu de la manera següent:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \Rightarrow v_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\
v_y &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow v_y - \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\
v_z &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \Rightarrow v_z - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{3.4}$$

L'equació (3.4) és un sistema d'EDP amb 3 equacions i amb 1 incògnita ($\phi(\mathbf{x}, t)$), per la qual cosa està sobredeterminat i pot no tenir solució.

Derivant una vegada les expressions (3.4) respecte a (x, y, z) s'obté el següent:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_x}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial v_x}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\
\frac{\partial v_y}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \frac{\partial v_y}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\
\frac{\partial v_z}{\partial x} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

RECORDATORI

El teorema de Schwartz (igualtat de derivades creuades) garanteix que per a una funció

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

contínua i amb derivades contínues es compleix:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\forall i, j$

L'equació (3.5) representa un sistema de 9 equacions. Considerant el teorema de Schwartz, es pot veure que en aquestes 9 equacions intervenen 6 funcions (derivades segones) *diverses* de la incògnita ϕ , és a dir:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \tag{3.6}$$

Per aquest motiu les podem eliminar del sistema original (3.5) i establir 3 relacions, denominades condicions de compatibilitat, entre les derivades parcials primeres dels components de $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Per tant, perquè existeixi una funció escalar $\phi(\mathbf{x}, t)$ tal que $\nabla \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, el camp vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ ha de verificar les equacions de compatibilitat següents:

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} &\stackrel{def}{=} 0 = S_z \\
\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} &\stackrel{def}{=} 0 = S_y \\
\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} &\stackrel{def}{=} 0 = S_x
\end{aligned} \right\} \text{ on } \mathbf{S} \equiv \begin{Bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \equiv \text{rot } \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} \tag{3.7}$$

En conseqüència, de l'equació (3.7), les equacions de compatibilitat es poden escriure com:

$$\begin{array}{l} \text{Equacions de compatibilitat} \\ \text{d'un camp} \\ \text{vectorial potencial} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = 0 \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \tag{3.8}$$

RECORDATORI

Un teorema de la geometria diferencial estableix que la divergència del rotacional de *qualsevol* camp és nul·la:

$$\nabla \cdot [\nabla \times (\bullet)] = 0$$

Observació 3-3

Les 3 equacions de compatibilitat (3.7) o (3.8) no són independents entre si i es pot establir una relació funcional entre elles. En efecte, aplicant la condició que la divergència del rotacional d'un camp vectorial és nul·la, s'obté el següent:

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0$$

3.3 Condicions de compatibilitat per a les deformacions infinitesimals

Sigui el camp de deformacions infinitesimals $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ de components:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (3.9)$$

que es pot descriure matricialment mitjançant:

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \times & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ (simètric) & \times & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A causa de la simetria de l'equació (3.10) només s'obtenen 6 equacions diferents:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} &= 0 & \varepsilon_{xy} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) &= 0 \\ \varepsilon_{yy} - \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0 & \varepsilon_{xz} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) &= 0 \\ \varepsilon_{zz} - \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0 & \varepsilon_{yz} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

L'equació (3.11) és un sistema de 6 EDP amb 3 incògnites, que són els components del vector de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. En general, aquest problema no tindrà solució llevat que es verifiquin determinades condicions de compatibilitat. Per obtenir aquestes condicions es deriven dues vegades les equacions (3.11) respecte a les coordenades espacials i s'obté el següent:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \left(\varepsilon_{xx} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)}{\partial x^2, \partial y^2, \partial z^2, \partial xy, \partial xz, \partial yz} = 6 \text{ equacions} \\
& \quad \vdots \\
& \quad \vdots \\
& \frac{\partial^2 \left(\varepsilon_{yz} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right)}{\partial x^2, \partial y^2, \partial z^2, \partial xy, \partial xz, \partial yz} = 6 \text{ equacions}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

que proporcionen un total de 36 equacions.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x^2} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z \partial x^2} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y \partial x^2} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial z^2} & \dots & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial z^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y \partial z^2} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial y} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^2 \partial x} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^2 \partial z} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^2 \partial x} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y \partial x \partial z} \right) \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y \partial z} & \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 u_y}{\partial z^2 \partial y} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^2 \partial z} \right)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

(per a $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz} = 18$ equacions)

(per a $\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz} = 18$ equacions)

En aquestes 36 equacions intervien totles les *terceres derivades* possibles de cada component dels desplaçaments u_x, u_y y u_z . Es tracta, per tant, de 30 derivades diferents:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3 u_x}{\partial x^3, \partial x^2 y, \partial x^2 z, \partial y^3, \partial y^2 x, \partial y^2 z, \partial z^3, \partial z^2 x, \partial z^2 y, \partial xyz} = 10 \text{ derivades} \\
& \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^3, \partial x^2 y, \partial x^2 z, \partial y^3, \partial y^2 x, \partial y^2 z, \partial z^3, \partial z^2 x, \partial z^2 y, \partial xyz} = 10 \text{ derivades} \\
& \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3, \partial x^2 y, \partial x^2 z, \partial y^3, \partial y^2 x, \partial y^2 z, \partial z^3, \partial z^2 x, \partial z^2 y, \partial xyz} = 10 \text{ derivades}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

que constitueixen les 30 incògnites del sistema de 36 equacions

$$f_n \left(\underbrace{\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}}_{30}, \frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \right) \quad n=1 \dots 36 \tag{3.15}$$

definit a (3.13).

Per tant, d'aquest sistema es poden eliminar les 30 incògnites *derivades dels desplaçaments* $\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l}$ i s'obtenen 6 equacions, en les quals no apareixeran aquestes terceres derivades, on intervindran les 21 *segones derivades del tensor de deformacions* $\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}$. Després de les operacions algebraiques corresponents, aquestes equacions queden de la següent manera:

$$\begin{array}{l} \text{Equacions de compatibilitat} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S_{xx}^{def} = \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} = 0 \\ S_{yy}^{def} = \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z} = 0 \\ S_{zz}^{def} = \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \\ S_{xy}^{def} = -\frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\ S_{xz}^{def} = -\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \\ S_{yz}^{def} = -\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.16)$$

que constitueixen *les equacions de compatibilitat per al tensor infinitesimal de deformació* ϵ . L'expressió compacta corresponent a les 6 equacions (3.16) és:

$$\begin{array}{l} \text{Equacions de compatibilitat} \\ \text{per al tensor infinitesimal de deformació} \end{array} \rightarrow \mathbf{S} = \nabla \times (\epsilon \times \nabla) = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

Observació 3-4

Les 6 equacions (3.16) no són funcionalment independents i, aprofitant de nou el fet que la divergència del rotacional d'un camp és intrínsecament nul·la, es poden establir entre elles les relacions funcionals següents:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = \nabla \cdot (\nabla \times (\epsilon \times \nabla)) = \mathbf{0} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial S_{zz}}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

Una altra forma d'expressar les condicions de compatibilitat (3.16) és fent servir l'operador de tres índexs denominat *operador de permutació* (e_{ijk}):

Observació 3-5

L'operador de tres índexs denominat *operador permutació* ve donat per:

$$e_{ijk} = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{si algun índex es repeteix: } (i = j \text{ o } i = k \text{ o } j = k) \\ 1 \rightarrow \text{sentit positiu (horari) d'índexs: } ijk \in \{123, 231, 312\} \\ -1 \rightarrow \text{sentit negatiu (antihorari) d'índexs: } ijk \in \{132, 321, 213\} \end{cases}$$

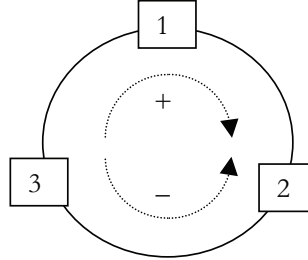


Figura 3-2

En aquest cas les equacions de compatibilitat es poden escriure així:

$$S_{mn} = e_{mjq} e_{nir} \varepsilon_{ij,qr} = 0 \quad (3.18)$$

Finalment, una altra expressió possible de les condicions de compatibilitat és:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \quad (3.19)$$

Observació 3-6

Atès que les equacions de compatibilitat (3.16) involucren només derivades espacials segones dels components del tensor de deformació $\mathbf{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, tot tensor de deformació lineal (polinòmic d'ordre 1) respecte a les variables de l'espai serà compatible i, per tant, integrable. Com a cas particular, tot tensor de deformació uniforme $\mathbf{\varepsilon}(t)$ serà integrable.

3.4 Integració del camp de deformacions infinitesimals

3.4.1 Fórmules preliminars

Sigui el tensor de rotació $\mathbf{\Omega}(\mathbf{x}, t)$ per al cas de deformacions infinitesimals (vegeu el capítol 2, apartat 2.11.6):

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla - \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

i el vector rotació $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$, associat a aquest, definit com:

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\Omega_{23} \\ -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} -\Omega_{yz} \\ -\Omega_{zx} \\ -\Omega_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

RECORDATORI

El tensor $\mathbf{\Omega}$ és antisimètric

$\mathbf{\Omega} \equiv$

$$\begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix}$$

Derivant el tensor de rotació (3.20) respecte a la coordenada x_k s'obté el següent:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \Rightarrow \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad (3.22)$$

Sumant i restant en l'equació (3.22) el terme $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j}$ i reordenant s'obté el següent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial x_k} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_j} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)}_{\epsilon_{ik}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)}_{\epsilon_{jk}} = \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (3.23)$$

L'equació (3.23) es pot fer servir ara per calcular les derivades cartesianes dels components del vector velocitat de rotació, $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$, de l'equació (3.21), i s'obté el següent:

$$\nabla \theta_1 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega_{yz}}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial z} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega_{yz}}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{zy}}{\partial z} \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\nabla \theta_2 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial x} = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial y} = \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega_{zx}}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x} \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\nabla \theta_3 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \theta_3}{\partial x} = -\frac{\partial \Omega_{xy}}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xx}}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = -\frac{\partial \Omega_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = -\frac{\partial \Omega_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial y} \end{cases} \quad (3.26)$$

Suposem ara que coneixem el vector de rotació $\theta(\mathbf{x}, t)$ i, a través seu mitjançant les equacions (3.21), el tensor de rotació $\Omega(\mathbf{x}, t)$. Considerant el tensor gradient dels desplaçaments $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ (vegeu el capítol 2, apartat 2.11.6) es pot escriure el següent:

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\Omega} \\ J_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\varepsilon_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Omega_{ij}} = \varepsilon_{ij} + \Omega_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (3.27)$$

Finalment, escrivint de forma explícita els diversos components de l'equació (3.27) i tenint en compte l'equació (3.21) s'obté el següent:

NOTA

D'acord amb l'equació (3.21), el tensor Ω es pot escriure com:

$$\Omega \equiv \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{12} & -\Omega_{31} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ \Omega_{31} & -\Omega_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}$$

	$j=1$	$j=2$	$j=3$
$i=1:$	$\frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$	$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \varepsilon_{xy} - \theta_3$	$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \varepsilon_{xz} + \theta_2$
$i=2:$	$\frac{\partial u_y}{\partial x} = \varepsilon_{xy} + \theta_3$	$\frac{\partial u_y}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$	$\frac{\partial u_y}{\partial z} = \varepsilon_{yz} - \theta_1$
$i=3:$	$\frac{\partial u_z}{\partial x} = \varepsilon_{xz} - \theta_2$	$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \varepsilon_{yz} + \theta_1$	$\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz}$

(3.28)

3.4.2 Integració del camp de deformacions

Sigui $\varepsilon(\mathbf{x}, t)$ el camp de deformacions infinitesimals que es vol integrar. Aquesta operació es farà en dos passos:

- 1) Utilitzant les expressions (3.24) a (3.26), s'integra el vector de rotació $\theta(\mathbf{x}, t)$. La integració, respecte a l'espai, del vector de rotació en les equacions (3.24) a (3.26) portarà a solucions del tipus:

$$\theta_i = \tilde{\theta}_i(x, y, z, t) + c_i(t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.29)$$

on les constants d'integració, $c_i(t)$, que en general poden ser funció del temps, es poden determinar coneixent el valor (o l'evolució al llarg del temps) del vector de rotació en algun punt del medi.

- 2) En un segon pas, coneguts ara el tensor de deformació infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$ i el vector de rotació $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)$, s'integra el camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ fent servir el sistema d'EDP de primer ordre (3.28) i s'obté el següent:

$$u_i = \tilde{u}_i(x, y, z, t) + c_i'(t) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (3.30)$$

Novament, les constants d'integració $c_i'(t)$ que apareixen en l'equació (3.30), que en general seran funció del temps, es determinaran coneixent el valor (o l'evolució al llarg del temps) dels desplaçaments en algun punt de l'espai.

Observació 3-7

Els processos d'integració dels passos 1) i 2) impliquen integrar sistemes d'EDP de primer ordre. Si es compleixen les equacions de compatibilitat (3.16), aquests sistemes seran integrables (sense portar a contradiccions en la seva integració) i permetran, finalment, obtenir el camp de desplaçaments.

Observació 3-8

L'aparició de les constants d'integració en les equacions (3.29) i (3.30) posa de manifest que un tensor de deformació integrable, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$, determina el moviment en cada instant de temps llevat d'una rotació $\mathbf{c}(t) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ i una translació $\mathbf{c}'(t) = \hat{\mathbf{u}}(t)$:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \hat{\mathbf{u}}(t) \end{cases}$$

A partir d'aquesta rotació $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ i translació $\hat{\mathbf{u}}(t)$ uniformes, es pot construir el camp de desplaçaments següent:

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) = \hat{\boldsymbol{\Omega}}(t) \mathbf{x} + \hat{\mathbf{u}}(t) \quad (\Rightarrow \mathbf{u}^* \otimes \nabla = \hat{\boldsymbol{\Omega}})$$

que es denomina *moviment de sòlid rígid*. En efecte, la deformació associada al desplaçament esmentat és nul·la:

$$\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \mathbf{u}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^* \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}^*) = \frac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\Omega}} + \underbrace{\hat{\boldsymbol{\Omega}}^T}_{-\hat{\boldsymbol{\Omega}}}) = \mathbf{0}$$

tal com correspon al concepte de sòlid rígid (sense deformació). Per tant, es pot concloure que *tot camp de deformació compatible determina els desplaçaments del medi continu llevat un desplaçament de sòlid rígid*, el qual s'ha de determinar amb les condicions de contorn apropiades.

NOTA

El tensor de rotació de sòlid rígid $\hat{\boldsymbol{\Omega}}(t)$ (antisimètric) es construeix a partir del vector de rotació $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$ com:

$$\hat{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \hat{\Omega}_{12} & -\hat{\Omega}_{31} \\ -\hat{\Omega}_{12} & 0 & \hat{\Omega}_{23} \\ \hat{\Omega}_{31} & -\hat{\Omega}_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\theta}_3 & \hat{\theta}_2 \\ \hat{\theta}_3 & 0 & -\hat{\theta}_1 \\ -\hat{\theta}_2 & \hat{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 3-1

Per a un cert moviment, el tensor de deformació infinitesimal té el valor següent:

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 8x & -\frac{y}{2} & \frac{3}{2}x^2z \\ -\frac{y}{2} & x & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & x^3 \end{bmatrix}$$

Obteniu el vector de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ i el tensor de rotació $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)$ sabent que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T} = \{3t, 0, 0\}^T$ y $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T} = \mathbf{0}$.

1) Vector de rotació

Plantejant els sistemes d'equacions (3.24) a (3.26), s'obté el següent:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = 0 & \quad \Rightarrow \theta_1 = C_1(t) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial x} = -3xz & \quad ; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial y} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = -\frac{3}{2}x^2 & \quad \Rightarrow \theta_2 = -\frac{3}{2}x^2z + C_2(t) \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial x} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial y} = \frac{3}{2} & \quad ; \quad \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = 0 & \quad \Rightarrow \theta_3 = \frac{3}{2}y + C_3(t) \end{aligned}$$

Les constants d'integració $C_i(t)$ es determinen imposant que $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T} = \mathbf{0}$ (i, per tant, el vector de rotació $\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T} = \mathbf{0}$) i s'obté el següent:

$$C_1(t) = C_2(t) = C_3(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}x^2z \\ \frac{3}{2}y \end{bmatrix}$$

i el tensor de rotació és:

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{3}{2}y & -\frac{3}{2}x^2z \\ \frac{3}{2}y & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}x^2z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Vector de desplaçaments

Plantejant, i integrant, els sistemes d'equacions (3.28) s'obté:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} = 8x & \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} = -2y & \quad ; \quad \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0 & \quad \Rightarrow \quad u_1 = 4x^2 - y^2 + C'_1(t) \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = y & \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} = x & \quad ; \quad \frac{\partial u_2}{\partial z} = 0 & \quad \Rightarrow \quad u_2 = xy + C'_2(t) \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} = 3x^2z & \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial y} = 0 & \quad ; \quad \frac{\partial u_3}{\partial z} = x^3 & \quad \Rightarrow \quad u_3 = x^3z + C'_3(t) \end{aligned}$$

i imposant que $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=(0,0,0)^T} = \{3t, 0, 0\}^T$:

$$C_1(t) = 3t \quad ; \quad C_2(t) = C_3(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} 4x^2 - y^2 + 3t \\ xy \\ x^3 z \end{Bmatrix}$$

3.5 Equacions de compatibilitat i integració del tensor velocitat de deformació

Tenint en compte les definicions dels tensors de deformació infinitesimal $\boldsymbol{\varepsilon}$ del tensor de rotació $\boldsymbol{\Omega}$ i del vector de rotació $\boldsymbol{\theta}$, hi ha una clara correspondència entre aquestes magnituds i *a)* el tensor velocitat de deformació \mathbf{d} , *b)* el tensor velocitat de rotació \mathbf{w} (o tensor spin) i *c)* el vector velocitat de rotació $\boldsymbol{\omega}$ donats al capítol 2. Les correspondències esmentades es poden establir de la següent manera:

$$\begin{array}{c} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\Omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\theta} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{u} \end{array} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{array}{c} \mathbf{v} \\ \mathbf{d}(\mathbf{v}) \\ d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \mathbf{w}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \\ \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v} \end{array} \quad (3.31)$$

És evident, llavors, que el concepte de compatibilitat d'un camp de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}$ introduït a l'apartat 3.1 es pot estendre, en virtut de la correspondència (3.31), a la compatibilitat d'un camp de velocitat de deformació $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$.

Per integrar aquest camp es podrà fer servir el mateix procediment vist a l'apartat 3.4.2, substituint $\boldsymbol{\varepsilon}$ per \mathbf{d} , \mathbf{u} per \mathbf{v} , $\boldsymbol{\Omega}$ per \mathbf{w} i $\boldsymbol{\theta}$ per $\boldsymbol{\omega}$. Certament, aquesta integració només es podrà dur a terme si es compleixen les equacions de compatibilitat (3.16) en els components de $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$.

Observació 3-9

Les equacions de compatibilitat resultants i el procés d'integració del tensor velocitat de deformació $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ no estan, en aquest cas, restringits al cas de deformació infinitesimal.

4 Tensió

4.1 Forces massiques i superficials

Considerarem que les forces que poden actuar sobre un medi continu poden ser de dos tipus: *forces massiques* i *forces de superfície* (o superficials).

4.1.1 Forces massiques

Definició

Forces massiques: són les forces que s'exerceixen a distància sobre les partícules de l'interior del medi continu. Exemples d'aquest tipus de forces són les forces gravitatòries, les inercials o les d'atracció magnètica.

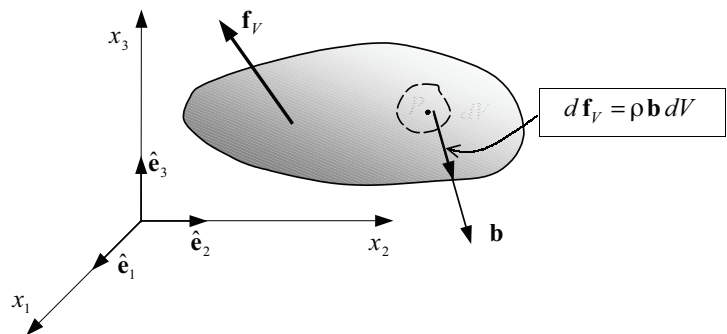


Figura 4-1 – Forces massiques en el medi continu

Sigui $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ la descripció espacial del camp vectorial *forces massiques per unitat de massa*. Multiplicant el *vector de forces massiques* $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ per la densitat ρ , s'obté el vector de forces massiques per unitat de volum $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ (*densitat de forces massiques*). La resultant total, \mathbf{f}_V , de les forces massiques sobre el volum material V de la Figura 4-1 serà la següent:

$$\mathbf{f}_V = \int_V \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV \quad (4.1)$$

Observació 4-1

En la definició de les forces de volum donada a (4.1), s'accepta implícitament l'existència del vector $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ de densitat de forces massiques. Això suposa que, donada una seqüència arbitrària de volums ΔV_i que contenen la partícula P i la seqüència corresponent de forces massiques $\mathbf{f}_{\Delta V_i}$, existeix el límit $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_{\Delta V_i}}{\Delta V_i}$ i, a més, és independent de la seqüència de volums considerada.

Exemple 4-1 Per a un medi continu, de volum V , situat a la superfície terrestre, obteniu el valor de la resultant de les forces massiques en funció de la constant gravitatòria g .

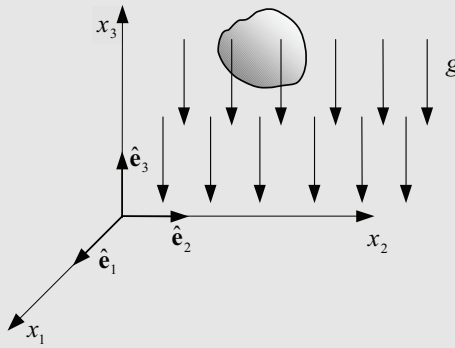


Figura 4-2 – Camp gravitacional

Suposant un sistema d'eixos cartesianes (vegeu la Figura 4-2) tal que l'eix x_3 tingui la direcció de la vertical des del centre de la terra, el camp vectorial $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ de les forces gravitatòries per unitat de massa és:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

i el valor de les forces massiques es pot calcular com:

$$\mathbf{f}_V = \int_V \rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\int_V \rho g dV \end{bmatrix}$$

4.1.2 Forces superficials

Definició

Forces superficials: forces que actuen sobre el *contorn* del volum material considerat. Es poden considerar produïdes per les *accions de contacte* de les partícules situades en el contorn del medi amb l'exterior d'aquest.

Sigui $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ la descripció espacial del camp vectorial de forces superficials *per unitat de superfície* en el medi continu de la Figura 4-3. La força resultant sobre un element diferencial de superfície dS serà $\mathbf{t} \cdot dS$ i la resultant total de les forces de superfície actuant en el contorn ∂V del volum V es podrà escriure com segueix:

$$\mathbf{f}_S = \int_{\partial V} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) dS \quad (4.2)$$

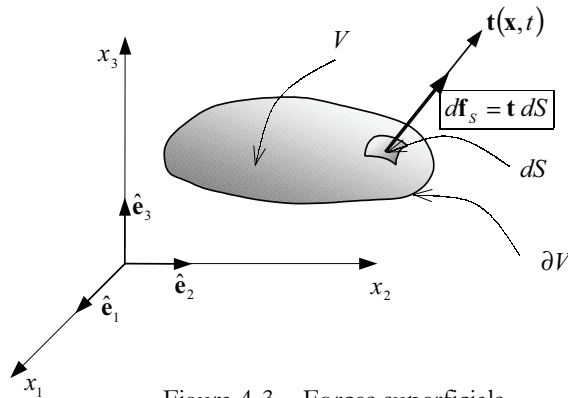


Figura 4-3 – Forces superficials

TERMINOLOGIA

En la bibliografia, se sol denominar *vector de tracció* el vector de forces superficials per unitat de superfície \mathbf{t} , encara que aquest concepte es pot estendre a punts de l'interior del medi continu.

Observació 4-2

En la definició de les forces de superfície donada a (4.2) es considera implícitament l'existència del vector de forces superficials per unitat de superfície $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ (vector de tracció). En altres paraules, si es considera una seqüència de superfícies ΔS_i , totes contenint el punt P, i les forces superficials $\mathbf{f}_{\Delta S_i}$ corresponents (vegeu la Figura 4-4), se suposa que existeix el límit $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_{\Delta S_i}}{\Delta S_i}$ i que aquest és independent de la seqüència de superfícies escollida.

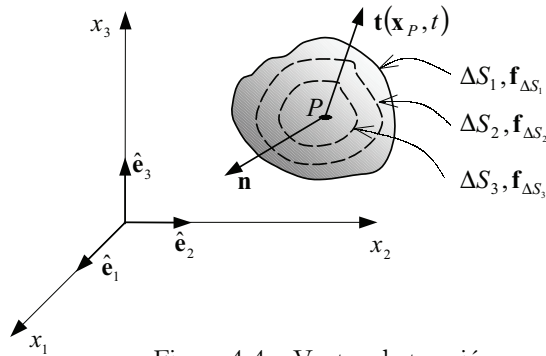


Figura 4-4 – Vector de tracció

4.2 Postulats de Cauchy

Considerem un medi continu sobre el qual actuen les forces màssiques i superficials corresponents (vegeu la Figura 4-5). Considerem també una partícula P de l'interior del medi continu i una superfície arbitrària, que passa pel punt P i de normal unitària \mathbf{n} en aquest punt, que divideix el medi continu en dues parts (volums materials). A la superfície de tall considerada ara com a part del contorn de cada un d'aquests volums materials actuaran les forces superficials produïdes pel contacte entre els dos.

Sigui \mathbf{t} el vector de tracció que actua en el punt P considerat com a part del contorn del primer d'aquests volums materials. En principi aquest vector de tracció (definit ara en un punt material de l'interior del medi continu original) dependrà:

- 1) de quina sigui la partícula considerada,
- 2) de l'orientació de la superfície (definida a través de la normal \mathbf{n}) i
- 3) de quina sigui la mateixa superfície de tall.

El postulat següent el fa independent d'aquesta última condició:

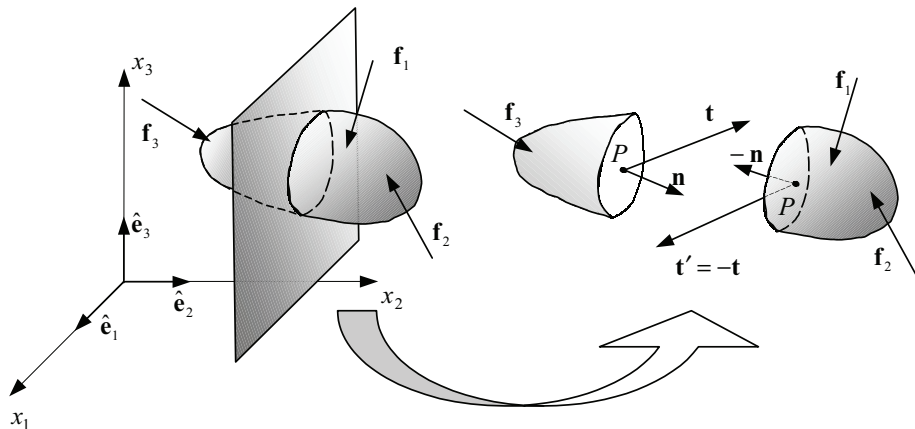


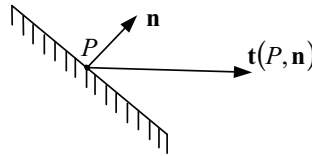
Figura 4-5 – Postulats de Cauchy

RECORDATORI

Un *postulat* és un ingredient fonamental d'una teoria que es formula com a principi d'aquesta i que, com a tal, no admet demostració.

Observació 4-3

1r postulat de Cauchy: El vector de tracció que actua en un punt material P d'un medi continu segons un pla de normal unitària \mathbf{n} depèn únicament del punt P i de la normal \mathbf{n} $\boxed{\mathbf{t} = \mathbf{t}(P, \mathbf{n})}$.

**Observació 4-4**

Sigui una partícula P d'un medi continu i considerem diferents superfícies que passen pel punt P de manera que totes tenen el mateix vector normal \mathbf{n} en el punt esmentat. D'acord amb el postulat de Cauchy, els vectors de tracció en el punt P , segons cada una d'aquestes superfícies, coincideixen. Al contrari, si la normal a les superfícies a P és diferent, els vectors de tracció corresponents ja no coincideixen (Figura 4-6).

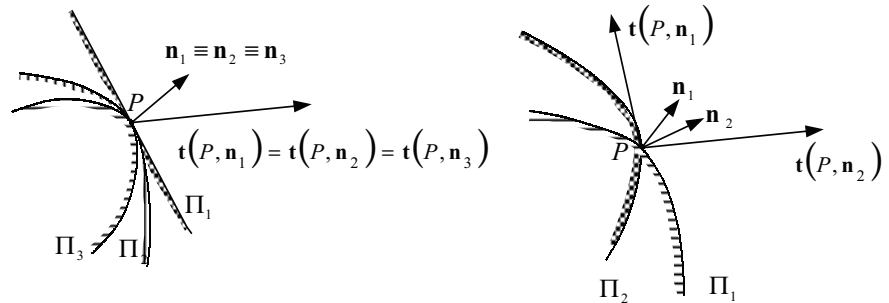


Figura 4-6 – Vector de tracció en un punt segons diferents superfícies

Observació 4-5

2n postulat de Cauchy - Principi d'acció i reacció: El vector de traccions en un punt P d'un medi continu, segons un pla de normal unitària \mathbf{n} , és igual i de sentit contrari al vector de traccions en el mateix punt P segons un pla de normal unitària $-\mathbf{n}$ en el mateix punt (vegeu la Figura 4-5):

$$\boxed{\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n})}$$

4.3 Tensor de tensions

4.3.1 Preliminars: aplicació de la 2a llei de Newton a un medi continu

Considerem un sistema discret de partícules en moviment, tal que una partícula genèrica i d'aquest té una massa m_i , una velocitat \mathbf{v}_i i una acceleració $\mathbf{a}_i = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}$. Sobre cada partícula i actua, a més, una força \mathbf{f}_i que es relaciona amb la seva acceleració a través de la segona llei de Newton

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i \quad (4.3)$$

i la resultant \mathbf{R} de les forces que actuen sobre totes les partícules del sistema resulta ser:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i \quad (4.4)$$

Els conceptes anteriors es poden generalitzar per al cas de medis continus entesos com a sistemes discrets constituïts per un nombre infinit de partícules. En aquest cas l'aplicació de la segona llei de Newton a un medi continu de massa total M , sobre el qual actuen unes forces exteriors caracteritzades pel vector de densitat de forces massiques $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ i el vector de tracció $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$, les partícules del qual tenen una acceleració $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ i que ocupa en l'instant t el volum d'espai V_t s'escriu:

$$\mathbf{R} = \underbrace{\int_{V_t} \rho \mathbf{b} dV}_{\text{Resultant de les forces massiques}} + \underbrace{\int_{\partial V_t} \mathbf{t} dS}_{\text{Resultant de les forces superficials}} = \int_M \mathbf{a} \frac{dm}{\rho dV} = \int_{V_t} \rho \mathbf{a} dV \quad (4.5)$$

4.3.2 Tensor de tensions

Considerem ara el cas particular de volum material constituït per un tetràedre elemental situat al voltant d'una partícula arbitrària P de l'interior del medi continu, orientat segons es mostra a la Figura 4-7. Sense pèrdua de generalitat es pot situar l'origen de coordenades a P .

El tetràedre té un vèrtex en P i les seves cares queden definides mitjançant un pla de normal $\mathbf{n} \equiv \{n_1, n_2, n_3\}^T$ que intersecta amb els plans coordenats definint una superfície genèrica d'àrea S (la base del tetràedre) a una distància h (l'altura del tetràedre) del punt P . Al seu torn, els plans coordenats defineixen les altres cares del tetràedre d'àrees S_1 , S_2 i S_3 amb normals (cap a fora) $-\hat{\mathbf{e}}_1$, $-\hat{\mathbf{e}}_2$ i $-\hat{\mathbf{e}}_3$, respectivament. Per consideracions geomètriques es poden establir les relacions següents:

$$S_1 = n_1 S \quad S_2 = n_2 S \quad S_3 = n_3 S \quad (4.6)$$

En la Figura 4-8, s'introdueix la notació per als vectors de tracció a cada una de les cares del tetràedre considerat i associats a les normals corresponents.

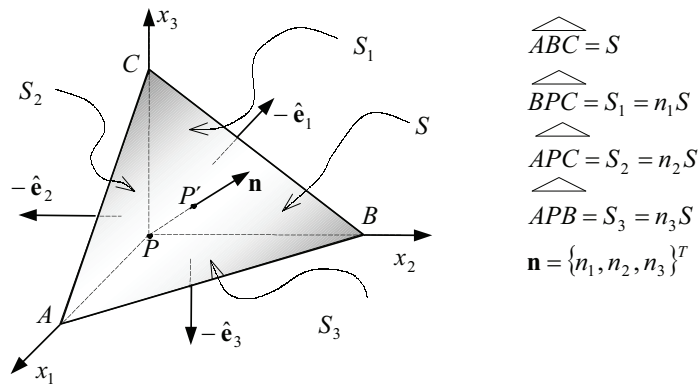


Figura 4-7 – Tetràedre elemental al voltant d'un punt material P

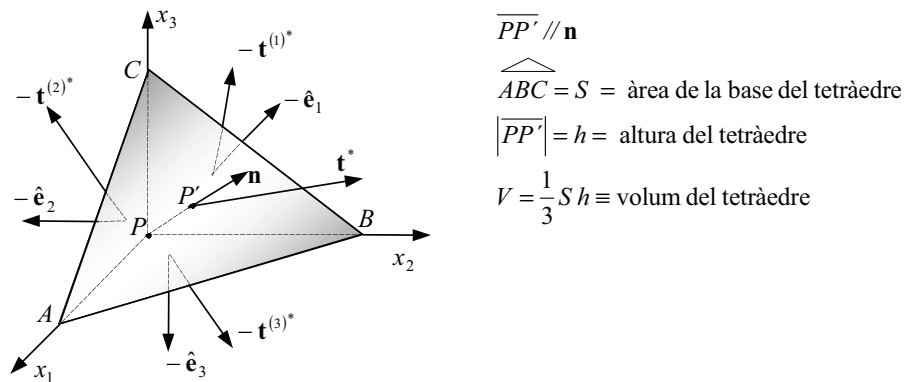


Figura 4-8 – Vectors de tracció en el tetràedre elemental

Pel segon postulat de Cauchy (vegeu l'Observació 4-5) el vector de tracció sobre un punt genèric \mathbf{x} d'una de les superfícies S_i (de normal cap a fora $-\hat{\mathbf{e}}_i$) es pot escriure

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, -\hat{\mathbf{e}}_i) = -\mathbf{t}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{e}}_i) = -\mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}) \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.7)$$

Observació 4-6

Teorema del valor mitjà: Donada una funció (escalar, vectorial o tensorial) *contínua* a l'interior d'un domini (compacte), la funció assoleix el seu valor mitjà a l'interior del domini esmentat.

En termes matemàtics:

$$\text{Donada } f(\mathbf{x}) \text{ contínua en } \Omega, \exists \mathbf{x}^* \in \Omega \mid \int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\Omega = \Omega \cdot \underbrace{f(\mathbf{x}^*)}_{\text{Valor mitjà de } f \text{ en } \Omega}$$

En la Figura 4-9 es pot veure la interpretació gràfica del teorema del valor mitjà en una dimensió.

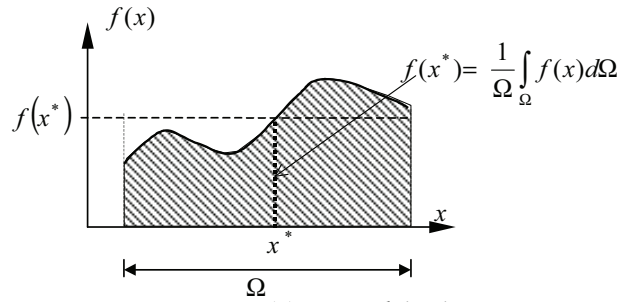


Figura 4-9 – Teorema del valor mitjà

En virtut del teorema del valor mitjà el camp vectorial $\mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x})$, que se suposa continu en el domini S_i , assoleix el seu valor mitjà a l'interior d'aquest. Sigui $\mathbf{x}_{s_i}^* \in S_i$ el punt on s'arriba del valor mitjà i $\mathbf{t}^{(i)*} = \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}_{s_i}^*)$ el valor mitjà esmentat. De forma anàloga, siguin $\mathbf{t}^* = \mathbf{t}(\mathbf{x}_s^*)$, $\rho^* \mathbf{b}^* = \rho(\mathbf{x}_v^*) \mathbf{b}(\mathbf{x}_v^*)$ i $\rho^* \mathbf{a}^* = \rho(\mathbf{x}_v^*) \mathbf{a}(\mathbf{x}_v^*)$ els valors mitjans corresponents dels camps: vector de tracció $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ en S , densitat de forces massiques $\rho \mathbf{b}(\mathbf{x})$ i d'acceleració $\rho \mathbf{a}(\mathbf{x})$, els quals, de nou, en virtut del teorema del valor mitjà, s'assoleixen en els punts, $\mathbf{x}_s^* \in S$ i $\mathbf{x}_v^* \in V$ de l'interior dels dominis corresponents. En conseqüència es pot escriure:

$$\begin{aligned}
 \int_{S_i} \mathbf{t}^{(i)}(\mathbf{x}) dS &= \mathbf{t}^{(i)*} \cdot S_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \\
 \int_S \mathbf{t}(\mathbf{x}) dS &= \mathbf{t}^* \cdot S \\
 \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV &= \rho^* \mathbf{b}^* \cdot V \\
 \int_V \rho(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) dV &= \rho^* \mathbf{a}^* \cdot V
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aplicant ara l'equació (4.5) al tetràedre considerat, es tindrà el següent:

$$\begin{aligned}
 \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS + \int_{S_1} \mathbf{t} dS + \int_{S_2} \mathbf{t} dS + \int_{S_3} \mathbf{t} dS &= \\
 = \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_S \mathbf{t} dS + \int_{S_1} (-\mathbf{t}^{(1)}) dS + \int_{S_2} (-\mathbf{t}^{(2)}) dS + \int_{S_3} (-\mathbf{t}^{(3)}) dS &= \int_V \rho \mathbf{a} dV
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

on s'ha tingut en compte l'equació (4.7). Substituint l'equació (4.8) en l'expressió (4.9), aquesta es pot escriure en termes dels valors mitjans com a:

$$\rho^* \mathbf{b}^* V + \mathbf{t}^* S - \mathbf{t}^{(1)*} S_1 - \mathbf{t}^{(2)*} S_2 - \mathbf{t}^{(3)*} S_3 = \rho^* \mathbf{a}^* V \tag{4.10}$$

Substituint ara l'equació (4.6) i expressant el volum total de la piràmide com a

$V = \frac{1}{3} S h$ l'equació (4.10), es pot escriure com segueix:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\rho^* \mathbf{b}^* h S + \mathbf{t}^* S - \mathbf{t}^{(1)*} n_1 S - \mathbf{t}^{(2)*} n_2 S - \mathbf{t}^{(3)*} n_3 S &= \frac{1}{3}\rho^* \mathbf{a}^* h S \Rightarrow \\ \frac{1}{3}\rho^* \mathbf{b}^* h + \mathbf{t}^* - \mathbf{t}^{(1)*} n_1 - \mathbf{t}^{(2)*} n_2 - \mathbf{t}^{(3)*} n_3 &= \frac{1}{3}\rho^* \mathbf{a}^* h \end{aligned} \quad (4.11)$$

L'expressió (4.11) és vàlida per a *qualsevol* tetràedre definit per un pla de normal \mathbf{n} situat a una distància h del punt P . Si es considera ara un tetràedre infinitesimal, al voltant del punt P , fent que tendeixi a zero el valor de $|\overline{PP'}| = h$, però mantenint constant l'orientació del pla ($\mathbf{n} = \text{constant}$), en l'equació (4.11) es té que els dominis S_i , S i V col·lapsen en el punt P (vegeu la Figura 4-7), amb la qual cosa els punts dels dominis respectius en els quals s'obtenen els valors mitjans tendeixen també al punt P :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{S_i}^* \rightarrow \mathbf{x}_P &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [\mathbf{t}^{(i)*}(\mathbf{x}_{S_i}^*)] = \mathbf{t}^{(i)}(P) \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \mathbf{x}_S^* \rightarrow \mathbf{x}_P &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} [\mathbf{t}^*(\mathbf{x}_S^*, \mathbf{n})] = \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (4.12)$$

i, a més,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \rho^* \mathbf{b}^* h \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3} \rho^* \mathbf{a}^* h \right) = 0 \quad (4.13)$$

Prenent ara el límit de l'equació (4.11) i substituint les (4.12) i (4.13) l'expressió (4.11), condueix a:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) - \mathbf{t}^{(1)} n_1 - \mathbf{t}^{(2)} n_2 - \mathbf{t}^{(3)} n_3 = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) - \mathbf{t}^{(i)} n_i = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

El vector de traccions $\mathbf{t}^{(i)}$ es pot escriure en funció dels seus components cartesianes, vegeu la Figura 4-10, com segueix:

$$\mathbf{t}^{(i)} = \sigma_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{12} \hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{13} \hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{1i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.15)$$

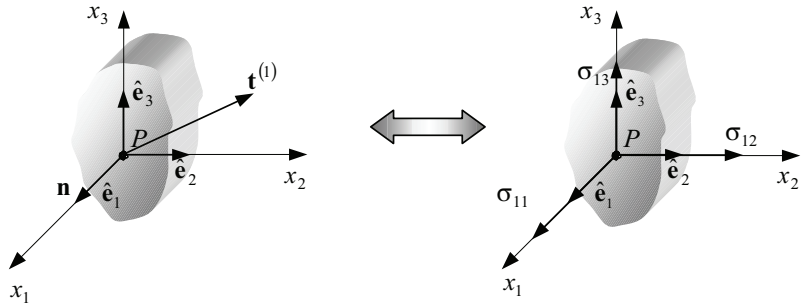
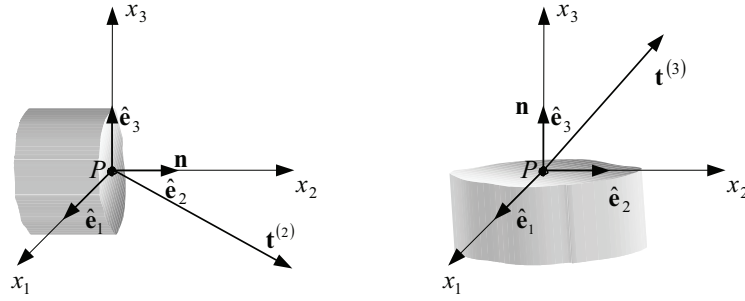


Figura 4-10 – Descomposició en components del vector de tracció $\mathbf{t}^{(i)}$

Operació que es pot fer en forma anàloga pels vectors de tracció $\mathbf{t}^{(2)}$ i $\mathbf{t}^{(3)}$ (vegeu la Figura 4-11):

Figura 4-11 – Vectors de tracció $\mathbf{t}^{(2)}$ i $\mathbf{t}^{(3)}$

$$\mathbf{t}^{(2)} = \sigma_{21}\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{22}\hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{23}\hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{2i}\hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.16)$$

$$\mathbf{t}^{(3)} = \sigma_{31}\hat{\mathbf{e}}_1 + \sigma_{32}\hat{\mathbf{e}}_2 + \sigma_{33}\hat{\mathbf{e}}_3 = \sigma_{3i}\hat{\mathbf{e}}_i \quad (4.17)$$

I per al cas general resulta:

$$\mathbf{t}^{(i)}(P) = \sigma_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (4.18)$$

$$\boxed{\sigma_{ij}(P) = t_j^{(i)}(P) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}} \quad (4.19)$$

Observació 4-7

Observeu que en l'expressió (4.19) les funcions σ_{ij} són funcions dels (components dels) vectors de tracció $t_j^{(i)}(P)$ sobre superfícies orientades específicament al punt P . S'emfasitza, doncs, que les funcions esmentades depenen del punt P , però no de la normal \mathbf{n} :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(P)$$

Substituint l'equació (4.19) en la (4.14):

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = n_i \mathbf{t}^{(i)} \Rightarrow t_j(P, \mathbf{n}) = n_i t_j^{(i)}(P) = n_i \sigma_{ij}(P) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \quad (4.20)$$

$$\boxed{\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(P)}$$

on s'ha definit el *tensor de tensions de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \quad (4.21)$$

Observació 4-8

Observeu que l'expressió (4.20) $\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}(P)$ és consistent amb el primer postulat de Cauchy (vegeu l'Observació 4-3) i que el segon postulat (Observació 4-5) es compleix a partir de:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{t}(P, -\mathbf{n}) = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n})$$

Observació 4-9

D'acord amb les expressions (4.18) i (4.21) la construcció del tensor de tensions de Cauchy es realitza a partir dels vectors de tracció segons tres plans coordenats que passen pel punt P (vegeu la Figura 4-12). Tanmateix, mitjançant l'equació (4.20), s'observa que en el tensor de tensions esmentat $\boldsymbol{\sigma}(P)$ es troba la informació sobre els vectors de tracció corresponents a *qualsevol pla* (identificat pel seu normal \mathbf{n}) que passi pel punt esmentat.

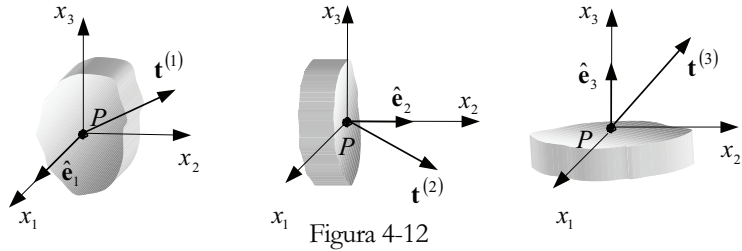


Figura 4-12

4.3.3 Representació gràfica de l'estat tensional en un punt

És freqüent acudir a representacions gràfiques del tensor de tensions basades en paral·lelepípedes elementals al voltant de la partícula considerada, amb cares orientades segons els tres plans coordenats, i en el qual els vectors de tracció corresponents es descomponen vectorialment en els seus components normal i tangencial al pla d'acord amb les expressions (4.15) a (4.20) (vegeu la Figura 4-13)

4.3.3.1 Notació científica

La representació de la Figura 4-13 correspon al que es coneix com a *notació científica*. En la notació esmentada la matriu de components del tensor de tensions s'escriu:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

i cada component σ_{ij} es pot caracteritzar en funció dels seus subíndexs com:

$$\sigma_{ij} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{índex } i \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{indica el pla d'actuació} \\ \text{(pla perpendicular a l'eix } x_i) \end{array} \right. \\ \text{índex } j \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{indica la direcció de la tensió} \\ \text{(direcció de l'eix } x_j) \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

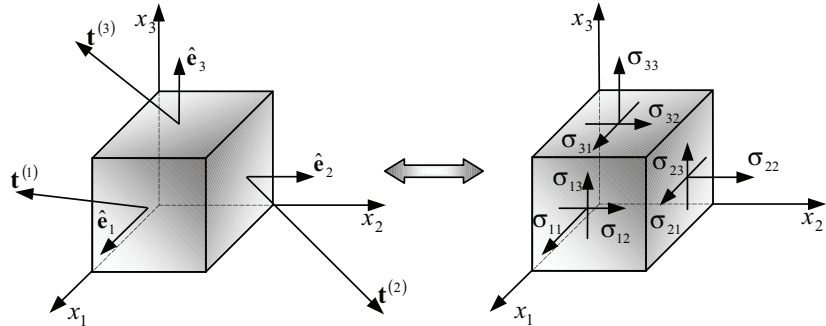


Figura 4-13 Representació gràfica del tensor de tensions (notació científica)

4.3.3.2 Notació en enginyeria

En notació en enginyeria, els components del tensor de tensions de Cauchy s'escriuen (vegeu la Figura 4-14):

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_a \rightarrow \text{Tensió normal actuant sobre el pla perpendicular a } a \\ \tau_{ab} \rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Tensió tangencial actuant sobre el pla perpendicular a l'eix } a \\ \text{en la direcció de l'eix } b \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

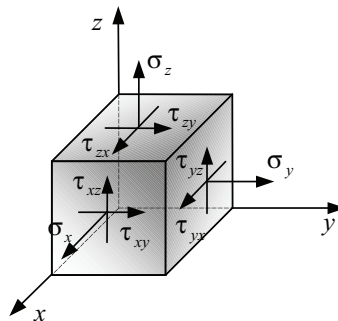


Figura 4-14 – Representació gràfica del tensor de tensions (notació en enginyeria)

4.3.3.3 Criteri de signes

Considerem un partícula P del medi continu i un pla de normal \mathbf{n} que passi per (vegeu la Figura 4-15). El vector de tracció \mathbf{t} corresponent es pot descompondre en els seus components normal σ_n i tangencial τ_n . El signe de la projecció de \mathbf{t} sobre \mathbf{n} ($\sigma = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}$) defineix el caràcter de *tracció* (σ_n tendeix a *traccionar* al pla) o *compressió* (σ_n tendeix a *comprimir* al pla) del component normal.

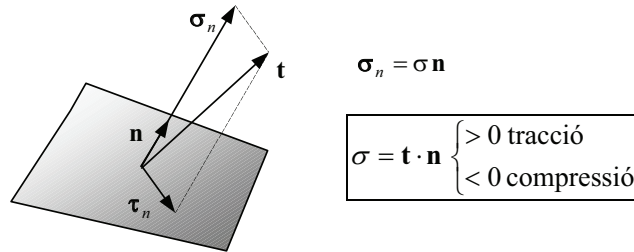


Figura 4-15 – Descomposició del vector de tracció

Aquest concepte es pot utilitzar per definir el signe dels components del tensor de tensions. A aquests efectes en el paral·lelepípede elemental de la Figura 4-13 es distingeix entre *cares vistes* o positives (la normal cap a fora de la qual va en la direcció positiva del vector de la base i que *es venen* a la figura) i les restants *cares* o *cares ocultes* o negatives.

El criteri de signes per a les cares vistes és el següent:

$$\text{Tensions normals } \sigma_{ij} \text{ o } \sigma_a \begin{cases} \text{positives (+)} \Rightarrow \text{tracció} \\ \text{negatives (-)} \Rightarrow \text{compressió} \end{cases}$$

$$\text{Tensions tangencials } \tau_{ab} \begin{cases} \text{positives (+)} \Rightarrow \text{sentit de l'eix b} \\ \text{negatives (-)} \Rightarrow \text{sentit contrari a l'eix b} \end{cases}$$

NOTA

És evident que valors negatius dels components del tensor de tensions redundaran en representacions gràfiques de signe oposat al dels valors positius indicats a les figures.

D'acord amb aquests criteris els sentits de les tensions representats en la Figura 4-14 (sobre les cares vistes del paral·lelepípede) corresponen a valors positius dels components del tensor de tensions respectius.

En virtut del principi d'acció i reacció ($\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = -\mathbf{t}(P, -\mathbf{n})$) i per a les cares ocultes del paral·lelepípede, els valors positius esmentats dels components del tensor de tensions suposen sentits contraris per a la seva representació gràfica (vegeu la Figura 4-16).

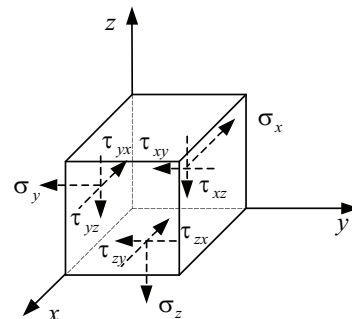
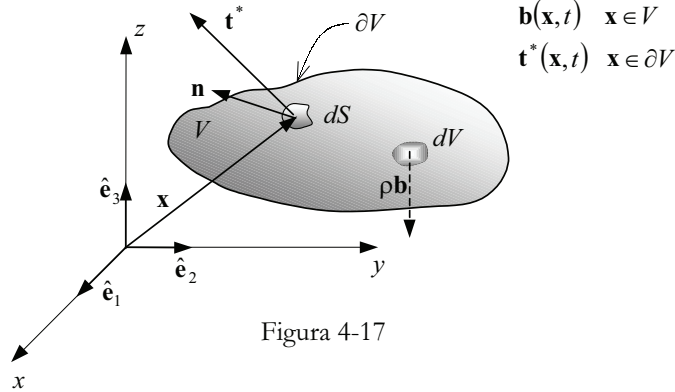


Figura 4-16 – Tensions positives en els plans ocults

4.4 Propietats del tensor de tensions

Considerem un volum material arbitrari V d'un medi continu i sigui ∂V el contorn d'aquest volum material. Siguin $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ les forces massiques que actuen en V i sigui $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ el vector de tracció prescrit que actua sobre el contorn ∂V . Siguin, finalment, $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ el camp vectorial d'acceleracions de les partícules i $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ el camp tensorial de tensions de Cauchy (vegeu la Figura 4-17).



4.4.1 Equació de Cauchy. Equació d'equilibri intern

El tensor de tensions, les forces massiques i les acceleracions estan relacionades per la denominada *equació de Cauchy*:

$$\text{Equació de Cauchy} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} & \forall \mathbf{x} \in V \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho a_j & j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.26)$$

l'expressió explícita de la qual resulta, en la notació utilitzada en enginyeria:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho b_x = \rho a_x \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho b_y = \rho a_y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \rho b_z = \rho a_z \end{cases} \quad (4.27)$$

Si el sistema està en equilibri l'acceleració és nul·la ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$), l'expressió (4.26) queda:

$$\text{Equació d'equilibri intern} \rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in V \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = 0 & j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.28)$$

que es coneix com l'*equació d'equilibri intern* del medi continu.

La deducció de les equacions de Cauchy es fa a partir del *postulat de balanç de la quantitat de moviment* que és objecte d'estudi en el capítol 5.

4.4.2 Equació d'equilibri en el contorn

L'equació (4.20) es pot aplicar ara als punts del contorn considerant que el vector de tracció és ara conegut en els punts esmentats ($\mathbf{t} = \mathbf{t}^*$). El resultat és la denominada *equació d'equilibri en el contorn*:

$$\text{Equació d'equilibri en el contorn} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ n_i \sigma_{ij} = t_j^* & j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (4.29)$$

4.4.3 Simetria del tensor de tensions de Cauchy

Mitjançant l'aplicació del principi de balanç del moment angular (vegeu el capítol 5) es pot demostrar que el tensor de tensions de Cauchy és *simètric*:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ji} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Observació 4-10

La simetria del tensor de tensions permet que les equacions de Cauchy (4.28) i d'equilibri en el contorn (4.29) es puguin escriure, respectivament, com:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} & \forall \mathbf{x} \in V \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho b_j = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i} + \rho b_j = \rho a_j & i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \\ &\begin{cases} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial V \\ n_i \sigma_{ij} = \sigma_{ji} n_i = t_j^*(\mathbf{x}, t) & \forall \mathbf{x} \in \partial V \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 4-2 Un medi continu es mou amb un camp de velocitats la descripció espacial del qual és $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = [z, \quad x, \quad y]^T$. El tensor de tensions de Cauchy és de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} y & g(x, z, t) & 0 \\ h(y) & z(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Determineu les funcions g , h i la forma espacial de les forces de volum $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ que generen el moviment.

Resolució

Sabem que el tensor de tensions és simètric; per tant:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \Rightarrow h(y) = g(x, z, t) \Rightarrow \begin{cases} h(y) = C \\ g(x, z, t) = C \end{cases}$$

on C és una constant.

A més, la divergència del tensor resulta ser nul·la:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y & C & 0 \\ C & z(1+t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

per tant, l'equació de Cauchy quedarà:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \mathbf{a} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{a}$$

i aplicant la fórmula de la derivada material de la velocitat:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla \otimes \mathbf{v} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z & x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} z & x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & z & x \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{bmatrix} y & z & x \end{bmatrix}^T$$

4.4.4 Diagonalització. Tensions i direccions principals

RECORDATORI

Un teorema de l'àlgebra tensorial garanteix que tot tensor de segon ordre simètric diagonalitza en una base ortonormal i els seus valors propis són reals.

Considerem el tensor de tensions $\boldsymbol{\sigma}$. En tractar-se d'un tensor de segon ordre simètric diagonalitza en una base ortonormal i els seus autovalors són reals. Considerem, doncs, la seva matriu de components a la base cartesiana (x, y, z) de treball (vegeu la Figura 4-18):

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}_{(x,y,z)} \quad (4.31)$$

En el sistema cartesià (x', y', z') en què $\boldsymbol{\sigma}$ diagonalitza, la seva matriu de components serà:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}_{(x',y',z')} \quad (4.32)$$

Definicions

Direccions principals (de tensió): Les direccions, associades als eixos (x', y', z') , en les quals el tensor de tensions diagonalitza.

Tensions principals: Els valors propis del tensor de tensions $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. En general, se suposaran ordenades de la forma $\{\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3\}$.

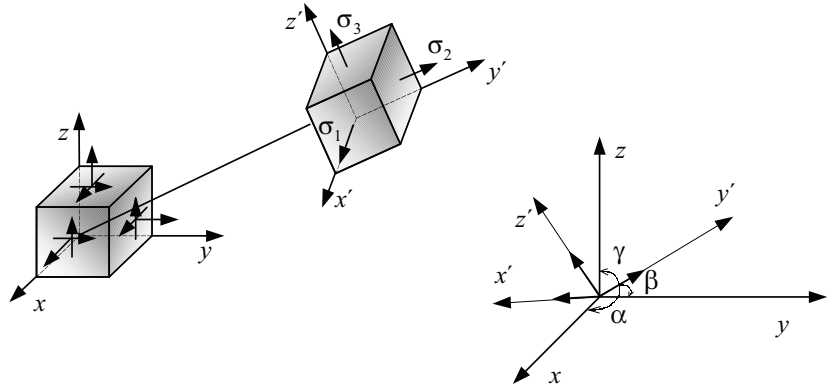


Figura 4-18 – Diagonalització del tensor de tensions

Per obtenir les direccions i tensions principals, s'ha de plantejar el problema d'autovalors associat al tensor σ . És a dir, si λ i \mathbf{v} són un autovalor i el seu corresponent autovector, respectivament, es planteja:

$$\sigma \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow [\sigma - \lambda \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

perquè la solució d'aquest sistema sigui no trivial (diferent de $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), el determinant de (4.33) ha de ser igual a zero, és a dir:

$$\det[\sigma - \lambda \mathbf{1}] \stackrel{\text{not}}{=} |\sigma - \lambda \mathbf{1}| = 0 \quad (4.34)$$

L'equació (4.34) és una equació polinòmica de tercer grau en λ . Sent el tensor σ simètric, les seves tres solucions ($\lambda_1 \equiv \sigma_1, \lambda_2 \equiv \sigma_2, \lambda_3 \equiv \sigma_3$) són reals. Una vegada trobats els autovalors i ordenats segons el criteri $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, es pot obtenir el vector propi $\mathbf{v}^{(i)}$ per a cada tensió σ_i , resolent el sistema (4.33):

$$[\sigma - \sigma_i \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v}^{(i)} = \mathbf{0} \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (4.35)$$

que proporciona una solució no trivial per als autovectors $\mathbf{v}^{(i)}$, ortogonals entre si, la qual, una vegada normalitzada, defineix els tres elements de la base corresponents a les tres direccions principals.

Observació 4-11

D'acord amb la interpretació gràfica dels components del tensor de tensions de l'apartat 4.3.3, sobre les cares del paral·lelepípede elemental associat a les direccions principals de tensió no actuen més que unes tensions normals que són, precisament, les tensions principals (vegeu la Figura 4-18).

4.4.5 Tensió mitjana i pressió mitjana

Definició

Tensió mitjana: És el valor mitjà de les tensions principals.

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Observant la matriu de components del tensor de tensions en les direccions principals (4.32), resulta:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.36)$$

Definició

Pressió mitjana: És la tensió mitjana canviada de signe

$$\text{pressió mitjana} = \overset{\text{not}}{\bar{p}} = -\sigma_m = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

Definició

Estat de tensió hidrostàtic: És aquell en el qual les tres tensions principals són iguals:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} = \sigma \mathbf{1}$$

NOTA

Es defineix com a *tensor isòtrop* aquell que és invariant davant qualsevol canvi de base ortogonal. L'expressió més general d'un tensor isòtrop de segon ordre és $\mathbf{T} = \alpha \mathbf{1}$, sent α un escalar qualsevol.

Observació 4-12

Un estat de tensió hidrostàtic implica que el tensor de tensions és isòtrop i, per tant, que la seva matriu de components és la mateixa en qualsevol sistema de coordenades cartesianes.

En conseqüència, qualsevol direcció és la direcció principal i l'estat tensional (vector de tracció) és el mateix per a qualsevol pla.

4.4.6 Descomposició del tensor de tensions en les seves parts esfèrica i desviadora

El tensor de tensions σ es pot descompondre en una part (o component) esfèrica σ_{esf} i una part desviadora σ' :

NOTA
Aquest tipus de descomposició es pot fer amb qualsevol tensor de segon ordre.

$$\sigma = \underbrace{\sigma_{esf}}_{\text{Part esfèrica}} + \underbrace{\sigma'}_{\text{Part desviadora}} \quad (4.37)$$

on la part esfèrica es defineix com:

$$\sigma_{esf} \stackrel{def}{=} \frac{1}{3} Tr(\sigma) \mathbf{1} = \sigma_m \mathbf{1} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

on σ_m és la tensió mitjana definida en (4.36). Per la definició (4.37) la part (o component) desviadora del tensor de tensions serà:

$$\sigma' = \sigma - \sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

resultant:

$$\sigma' \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{xy} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{xz} & \tau'_{yz} & \sigma'_z \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Observació 4-13

La part esfèrica del tensor de tensions σ_{esf} és un tensor isòtrop (i defineix un estat tensional hidrostàtic) i, per tant, és invariant davant un canvi de base ortogonal.

Observació 4-14

El component desviador del tensor és un *indicador* de quant s'aparta l'estat tensional d'un hidrostàtic (vegeu l'equació (4.39) i l'Observació 4-13).

Observació 4-15

Les direccions principals del tensor de tensions i del seu component desviador coincideixen. La demostració és trivial tenint en compte que, de l'Observació 4-13, la part esfèrica σ_{esf} és diagonal en qualsevol sistema de coordenades. En conseqüència, en l'equació (4.39), si σ diagonalitza en una certa base, també ho fa σ' .

Observació 4-16

La traça del tensor (component) desviador és nul·la. Tenint en compte les equacions (4.36) i (4.39):

$$Tr(\boldsymbol{\sigma}') = Tr(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{esf}) = Tr(\boldsymbol{\sigma}) - Tr(\boldsymbol{\sigma}_{esf}) = 3\sigma_m - 3\sigma_m = 0$$

4.4.7 Invariants tensorials

Els tres invariants fonamentals del tensor de tensions (*o invariants I*) són:

$$I_1 = Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (4.41)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - I_1^2) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \quad (4.42)$$

$$I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) \quad (4.43)$$

Qualsevol combinació dels invariants I és, al seu torn, un altre invariant. Així es defineixen els següents *invariants J*:

$$J_1 = I_1 = \sigma_{ii} \quad (4.44)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 + 2I_2) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) \quad (4.45)$$

$$J_3 = \frac{1}{3}(I_1^3 + 3I_1I_2 + 3I_3) = \frac{1}{3}Tr(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} \quad (4.46)$$

Observació 4-17

Per a un tensor purament desviador $\boldsymbol{\sigma}'$ els *invariants J* corresponents resulten ser (vegeu l'Observació 4-16 i les equacions (4.41) a (4.46)):

$$\left. \begin{array}{l} J_1 = I_1 = 0 \\ J_2 = I_2 \\ J_3 = I_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} J_1' = I_1' = 0 \\ J_2' = I_2' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}') = \frac{1}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ji} \\ J_3' = I_3' = \frac{1}{3}(\sigma'_{ij}\sigma'_{jk}\sigma'_{ki}) \end{array} \right.$$

RECORDATORI

Els invariants tensorials són combinacions algebraiques escalars dels components d'un tensor, que no canvien en canviar la base.

4.5 Tensor de tensions en coordenades curvilínies ortogonals

NOTA

Són aplicables aquí els mateixos conceptes i nocions respecte a sistemes de coordenades curvilínies ortogonals, explicats a l'apartat 2.15 del capítol 2.

4.5.1 Coordenades cilíndriques

Considerem un punt a l'espai definit per les coordenades cilíndriques $\{r, \theta, z\}$ (vegeu la Figura 4-19):

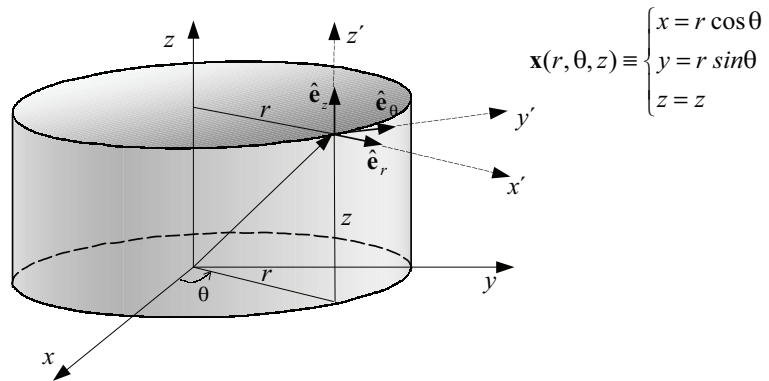


Figura 4-19 – Coordenades cilíndriques

En el punt esmentat considerarem la base física (ortonormal) $\{\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_z\}$ i un sistema cartesià d'eixos locals $\{x', y', z'\}$ definit dextrogrir. En aquesta base els components del tensor de tensions són els següents:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta z} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

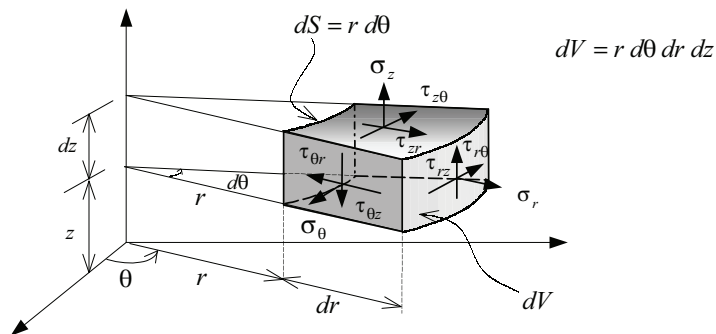


Figura 4-20 – Element diferencial en coordenades cilíndriques

La seva representació gràfica sobre un paral·lelepípede elemental es pot veure a la Figura 4-20, on s'han dibuixat els components del tensor de tensions en les cares vistes. Observeu que, ara, les cares vistes a la figura no coincideixen amb les cares positives, definides (en el mateix sentit que a l'apartat 4.3.3.3) com aquelles en què la seva normal coincideix (en direcció i sentit) amb un vector de la base física.

4.5.2 Coordenades esfèriques

Un punt en l'espai està definit per les coordenades esfèriques $\{r, \theta, \phi\}$ (vegeu la Figura 4-21).

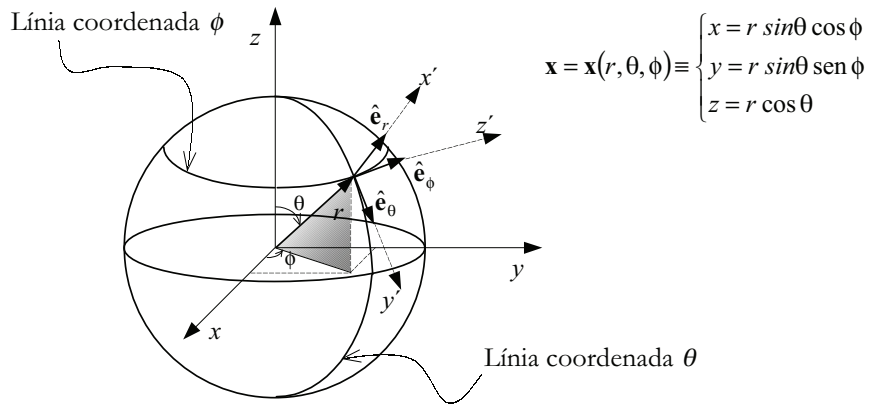


Figura 4-21 – Coordenades esfèriques

Per a cada punt considerarem la base física (ortonormal) $\{\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi\}$ i un sistema d'eixos locals cartesià $\{x', y', z'\}$ definit dextrogrir. En aquesta base els components del tensor de tensions són els següents:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{x'y'} & \sigma_{y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{x'z'} & \tau_{y'z'} & \sigma_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_r & \tau_{r\theta} & \tau_{r\phi} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_\theta & \tau_{\theta\phi} \\ \tau_{r\phi} & \tau_{\theta\phi} & \sigma_\phi \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

La representació gràfica dels components del tensor de tensions en coordenades esfèriques es pot veure a la Figura 4-22, on s'han dibuixat els components del tensor de tensions en les cares vistes.

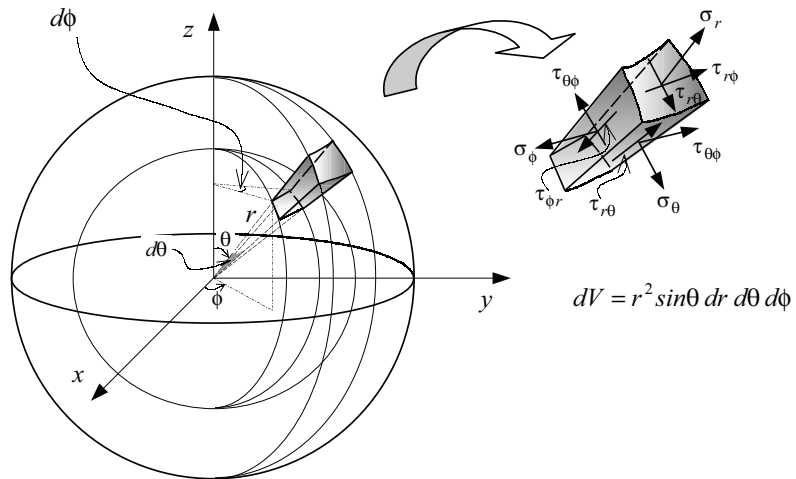


Figura 4-22 – Element diferencial en coordenades esfèriques

4.6 Cercle de Mohr en 3 dimensions

4.6.1 Interpretació gràfica d'estats tensionals

El tensor de tensions juga un paper tan crucial en l'enginyeria que, tradicionalment, s'han desenvolupat diversos procediments, essencialment gràfics, per a la seva visualització i interpretació. Els més comuns són els anomenats *cercles de Mohr*.

Sigui P un punt arbitrari d'un medi continu i sigui $\sigma(P)$ el tensor de tensions en el punt esmentat. Considerem un pla arbitrari, amb normal unitària \mathbf{n} , que passa per P (vegeu la Figura 4-23). El vector de tracció en el punt P corresponent al pla esmentat és $\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n}$. Podem descompondre ara el vector esmentat en els seus components σ_n , normal al pla considerat, i el component τ_n tangent al pla esmentat.

Considerem ara el component normal $\sigma_n = \sigma \cdot \mathbf{n}$, on σ és el component normal de la tensió sobre el pla, definit d'acord amb el criteri de signes de l'apartat 4.3.3.3:

$$\sigma_n = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad \begin{cases} \sigma > 0 \text{ tracció} \\ \sigma < 0 \text{ compressió} \end{cases} \quad (4.49)$$

Considerem ara el component tangencial τ_n , del qual només ens interessarà el seu mòdul:

$$\tau_n = \mathbf{t} - \sigma_n \quad |\tau_n| = \tau \geq 0 \quad (4.50)$$

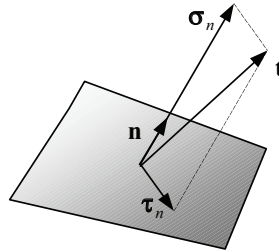
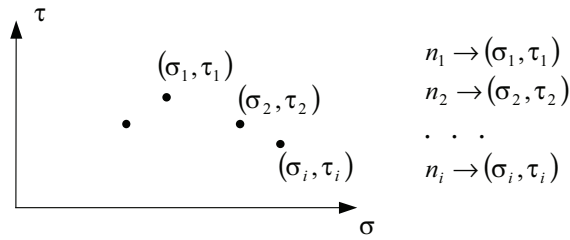


Figura 4-23 – Descomposició del vector de tracció

Podem caracteritzar ara l'estat tensional en el punt considerat sobre el pla de normal \mathbf{n} mitjançant la parella:

$$(\sigma, \tau) \rightarrow \begin{cases} \sigma \in \mathbb{R} \\ \tau \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \quad (4.51)$$

que, al seu torn, determina un punt del semiplà $(x \equiv \sigma, y \equiv \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ de la Figura 4-24. Si considerem ara tots els plans que passen pel punt P (caracteritzats per totes les possibles normals $\mathbf{n}_{(i)}$) i obtenim els valors corresponents de la tensió normal σ_i i tangencial τ_i i, finalment, els representem en el semiespai esmentat, obtindrem un núvol de punts del qual ens podem preguntar si ocupa tot el semiespai o està limitat a un lloc geomètric determinat. La resposta a la pregunta esmentada la proporciona l'anàlisi que segueix.

Figura 4-24 – Lloc geomètric dels punts (σ, τ)

4.6.2 Determinació dels cercles de Mohr

Considerem el sistema d'eixos cartesianes associat a les direccions principals del tensor de tensions. En aquesta base, els components del tensor seran:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \text{ amb } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (4.52)$$

i el vector de tracció tindrà per components

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

on n_1, n_2, n_3 són els components de la normal \mathbf{n} a la base associada a les direccions principals. En vista de l'equació (4.53) el component normal de la tensió (σ), definit en l'equació (4.49), i el mòdul del vector de tracció seran, respectivament:

$$\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = [\sigma_1 n_1, \sigma_2 n_2, \sigma_3 n_3] \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \boxed{\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma} \quad (4.54)$$

$$|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 \quad (4.55)$$

També podem relacionar els mòduls del vector de tracció i dels seus components normal i tangencial mitjançant:

$$|\mathbf{t}|^2 = \boxed{\sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2} \quad (4.56)$$

on s'ha tingut en compte l'expressió (4.55). Finalment, la condició de normal unitària de \mathbf{n} es pot expressar en funció dels seus components com:

$$|\mathbf{n}| = 1 \Rightarrow \boxed{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1} \quad (4.57)$$

Les equacions (4.56), (4.54) i (4.57) es poden sintetitzar en l'equació matricial següent:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} \Rightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (4.58)$$

El sistema (4.58) es pot interpretar com un sistema lineal amb:

- Una matriu de coeficients, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\sigma})$, definida pel tensor de tensions en el punt P (a través de les tensions principals).
- Un terme independent, \mathbf{b} , definit per les coordenades d'un cert punt en el semiespai $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}$ (representatives, al seu torn, de l'estat tensional sobre un cert pla).
- Un vector d'incògnites \mathbf{x} que determina (mitjançant els components de la normal \mathbf{n}) a quin pla corresponen els valors de σ i τ elegits.

Observació 4-18

En principi només seran factibles les solucions del sistema (4.58) els components del qual $\mathbf{x} \equiv [n_1^2, n_2^2, n_3^2]^T$ siguin positius i inferiors a 1

$$(vegeu l'equació (4.57)). \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq n_1^2 \leq 1 \\ 0 \leq n_2^2 \leq 1 \\ 0 \leq n_3^2 \leq 1 \end{cases}$$

Tota parella $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ que condueixi a una solució \mathbf{x} que compleixi aquest requisit serà considerat un *punt factible* del semiespai $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}$, el qual és *representatiu de l'estat tensional sobre un pla que passa per P*. El lloc geomètric dels punts $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$ factibles és la denominada *regió factible* del semiespai $\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\tau}$.

Considerem ara l'objectiu de trobar la regió factible. Mitjançant algunes operacions algebraïques, el sistema (4.58) es pot escriure com:

$$\begin{cases} (I) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_3)\sigma + \sigma_1\sigma_3 - \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_3)}n_1^2 = 0 \\ (II) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)\sigma + \sigma_2\sigma_3 - \frac{A}{(\sigma_2 - \sigma_3)}n_2^2 = 0 \\ (III) \rightarrow \sigma^2 + \tau^2 - (\sigma_1 + \sigma_2)\sigma + \sigma_1\sigma_2 - \frac{A}{(\sigma_1 - \sigma_2)}n_3^2 = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

$$A = (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)$$

Considerem ara, per exemple, l'equació (III) del sistema (4.59). És fàcil comprovar que es pot escriure com:

$$\begin{cases} (\sigma - a)^2 + \tau^2 = R^2 \\ a = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) \\ R = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)n_3^2} \end{cases} \quad (4.60)$$

que correspon a l'equació d'una semicircumferència en el semiespai $\sigma - \tau$ de centre C_3 i radi R_3 :

$$C_3 = \left(\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2), 0 \right)$$

$$R_3 = \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_3)n_3^2} \quad (4.61)$$

Els diferents valors de $n_3^2 \in [0,1]$ determinaran un conjunt de semicircumferències concèntriques de centre C_3 i radis $R_3(n_3)$ en el semiespai $\sigma - \tau$, i els punts corresponents ocuparan una certa regió d'aquest. Aquesta regió vindrà delimitada pels valors màxim i mínim de $R_3(n_3)$. Observant que el radical de l'expressió de R_3 en (4.61) és positiu, aquests valors s'obtinran per a $n_3^2 = 0$ (el radi mínim) i $n_3^2 = 1$ (el radi màxim).

$$n_3^2 = 0 \Rightarrow R_3^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$n_3^2 = 1 \Rightarrow R_3^{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_3 \quad (4.62)$$

El domini delimitat per les dues semicircumferències definirà una primera limitació del domini factible a l'indicat en la Figura 4-25.

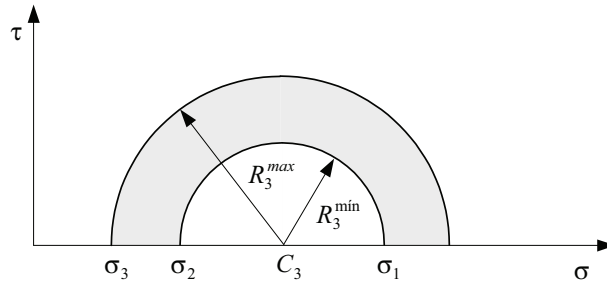


Figura 4-25 – Primera limitació del domini factible

El procés es pot repetir ara per a les altres dues equacions (I) i (II) de (4.59) i s'obtenen els resultats següents:

$$\begin{aligned} \text{- Equació (I): } C_1 &= \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)}_{a_1}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_1^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ R_1^{\max} = |\sigma_1 - a_1| \end{cases} \\ \text{- Equació (II): } C_2 &= \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}_{a_2}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_2^{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) \\ R_2^{\min} = |\sigma_2 - a_2| \end{cases} \\ \text{- Equació (III): } C_3 &= \left(\underbrace{\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)}_{a_3}, 0 \right) \Rightarrow \begin{cases} R_3^{\min} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) \\ R_3^{\max} = |\sigma_3 - a_3| \end{cases} \end{aligned}$$

Per a cada cas es té, com a regió factible, una semicorona definida pels radis mínim i màxim. Evidentment la regió factible final ha d'estar a la intersecció de les semicorones esmentades tal com s'indica en la Figura 4-26).

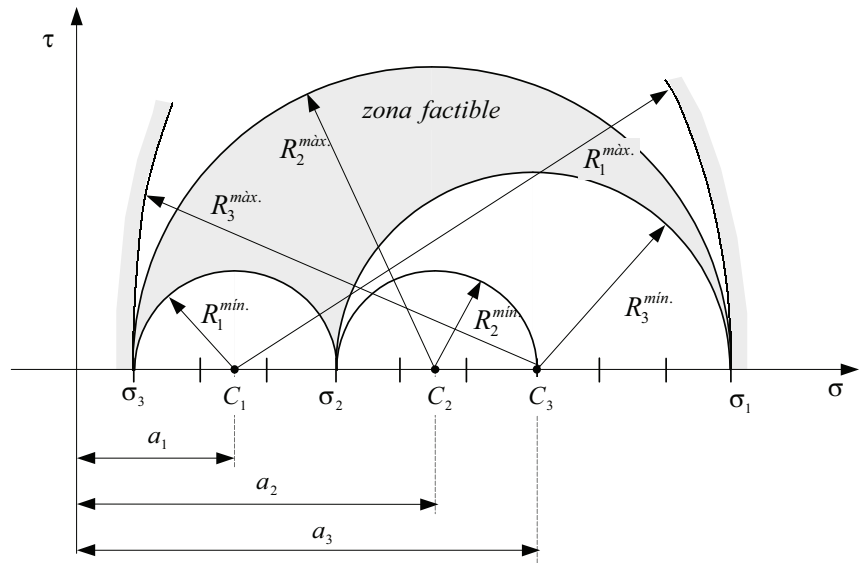


Figura 4-26 – Zona factible

En la Figura 4-27 es mostra la construcció final resultant dels tres semicercles de Mohr passant pels punts σ_1 , σ_2 i σ_3 .

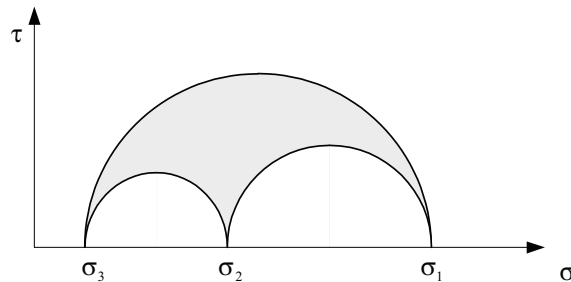


Figura 4-27 – Cercles de Mohr en tres dimensions

Es pot demostrar, a més, que tot punt de l'interior del domini enclòs pels cercles de Mohr és factible (en el sentit que els corresponents valors de σ i τ corresponen a estats tensionals sobre un cert pla que passa pel punt P).

La construcció del cercle de Mohr és trivial (una vegada conegudes les tres tensions principals) i resulta d'utilitat per discriminar possibles estats tensionals sobre plans, determinar valors màxims de les tensions tangencials, etc.

Exemple 4-3 Les tensions principals en un punt determinat d'un medi continu són:

$$\sigma_1=10 \quad ; \quad \sigma_2=5 \quad ; \quad \sigma_3=2$$

En un pla que passa pel punt esmentat, les tensions normal i tangencial són σ i τ respectivament. Raoneu si són possibles els valors de σ i τ següents:

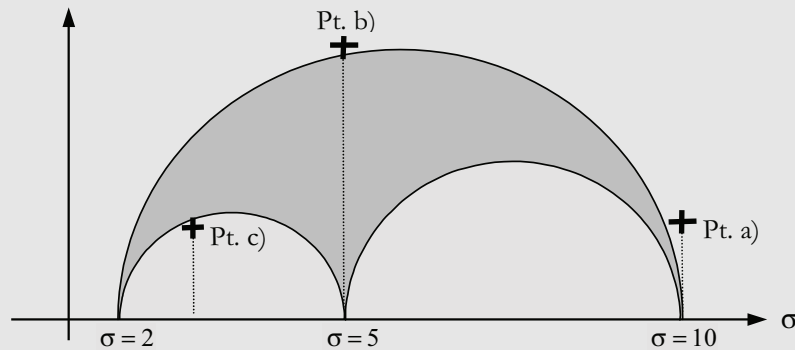
a) $\sigma = 10 \quad ; \quad \tau = 1$

$$b) \sigma = 5 \quad ; \quad \tau = 4$$

$$c) \sigma = 3 \quad ; \quad \tau = 1$$

Resolució

Dibuixant els *Cercles de Mohr* per a l'estat tensional que ens defineixen i els punts demanats en el semiespai $\sigma - \tau$:



Només a la zona ombrejada és possible trobar punts que representin estats tensionals (punts factibles). Es comprova *que cap dels considerats ho pot ser*.

4.7 Cercle de Mohr en 2 dimensions

Molts problemes reals en enginyeria s'assimilen a un estat tensional ideal bidimensional en el qual es coneix (o se suposa) *a priori* quina és una de les direccions principals de tensió. En aquests casos, fent coincidir l'eix cartesià x_3 (o l'eix z) amb la direcció principal esmentada (vegeu la Figura 4-28), els components del tensor de tensions es poden escriure com:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Considerem ara *només la família de plans paral·lels a l'eix x_3* (per tant, el component n_3 de la seva normal és nul). El vector de tracció corresponent té l'expressió:

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

i el seu component t_3 s'anul·la. En les equacions (4.63) i (4.64) els components del tensor de tensions $\boldsymbol{\sigma}$, de la normal al pla \mathbf{n} i del vector tracció \mathbf{t} , associats a la direcció x_3 o bé són coneguts (aquest és el cas de $\sigma_{13}, \sigma_{23}, n_3$ o t_3), o bé no intervenen en el problema (com és el cas de σ_{33}). Aquesta circumstància suggereix prescindir de la tercera dimensió i reduir l'anàlisi a les dues dimensions associades als eixos x_1, x_2 (o x, y) com s'indica en la Figura 4-28.

NOTA

Aquest tipus de problemes s'analitza amb profunditat al capítol 7, dedicat a l'elasticitat bidimensional.

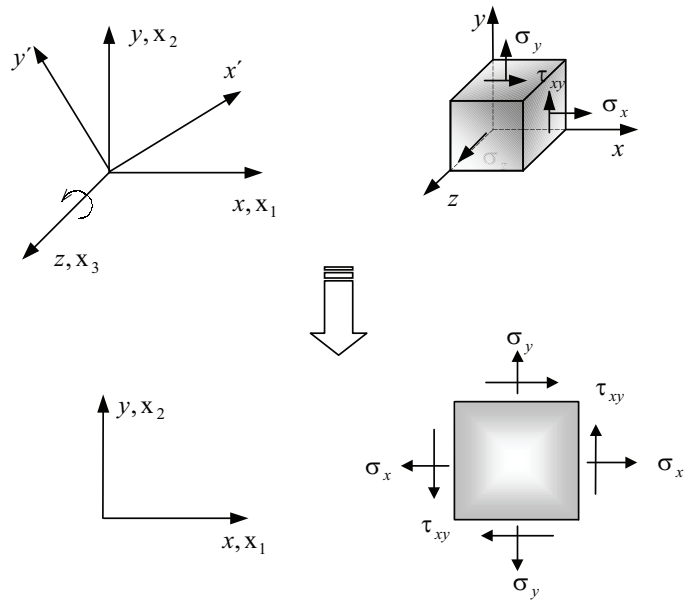


Figura 4-28 – Reducció del problema de tres a dues dimensions

Lavors podem definir el problema *al pla* a partir de:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

$$\mathbf{t}(P, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

4.7.1 Estat tensional sobre un pla donat

Sigui un pla (sempre paral·lel a l'eix z) la normal unitària \mathbf{n} de la qual forma un angle θ amb l'eix \mathbf{x} . Es defineix un vector unitària \mathbf{m} en la direcció *tangencial* a la traça del pla i *en el sentit indicat* a la Figura 4-29.

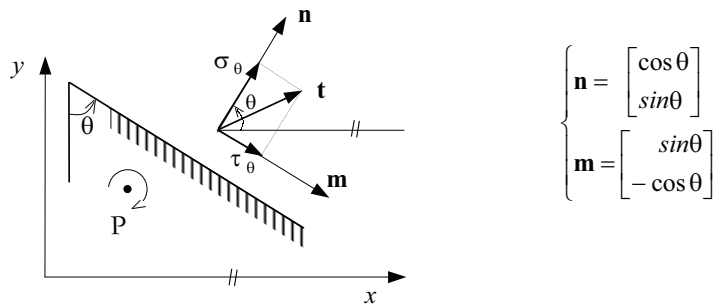


Figura 4-29 – Estat tensional sobre un pla donat

Observació 4-19

Tant la normal \mathbf{n} com el vector tangent \mathbf{m} i l'angle θ en la Figura 4-29 tenen associats els *sentits* següents:

- Vector *normal* \mathbf{n} : cap a l'*exterior* del pla (respecte a la posició del punt P)
- Vector *tangent* \mathbf{m} : tendeix a *girar en sentit horari* respecte al punt P.
- Angle θ : positiu en el sentit *antiborari*.

Sigui σ el tensor de tensions en el punt amb components a la base cartesiana:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

Utilitzant l'expressió (4.66), el vector de tracció en el punt sobre el pla considerat és:

$$\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta \\ \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Es defineixen la *tensió normal* σ_θ i la *tensió tangencial* τ_θ , sobre el pla d'inclinació θ (vegeu la Figura 4-29) com:

$$\sigma_\theta = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta & \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2 \theta + \tau_{xy} 2 \sin\theta \cos\theta + \sigma_y \sin^2 \theta$$

$$\tau_\theta = \mathbf{t} \cdot \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \sigma_x \cos\theta + \tau_{xy} \sin\theta & \tau_{xy} \cos\theta + \sigma_y \sin\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

$$\tau_\theta = \sigma_x \sin\theta \cos\theta - \sigma_y \sin\theta \cos\theta + \tau_{xy} [\sin^2 \theta - \cos^2 \theta]$$

que es poden rescriure com:

$$\begin{cases} \sigma_\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\theta) + \tau_{xy} \sin(2\theta) \\ \tau_\theta = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\theta) - \tau_{xy} \cos(2\theta) \end{cases} \quad (4.71)$$

NOTA

S'utilitzen aquí les següents relacions trigonomètriques:

$$\left. \begin{aligned} \sin(2\theta) &= 2 \sin\theta \cos\theta \\ \cos^2 \theta &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned} \right\}$$

4.7.2 Problema directe: diagonalització del tensor de tensions

El problema directe consisteix a obtenir, coneguts els components del tensor de tensions (4.67), en un cert sistema d'eixos $x-y$, les direccions i tensions principals (vegeu la Figura 4-30).

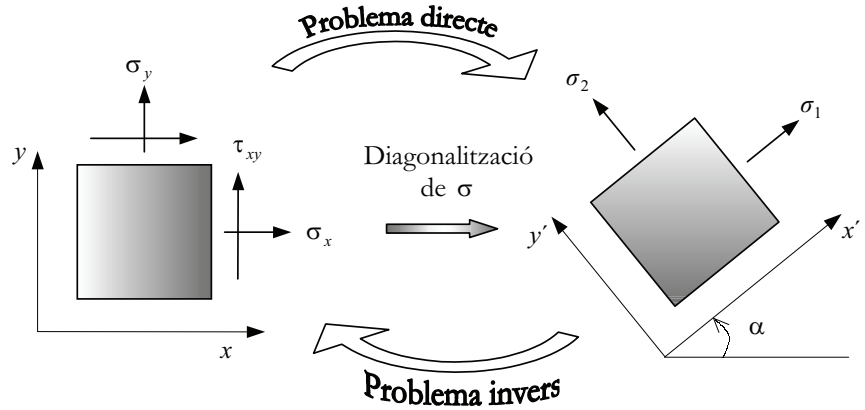


Figura 4-30 – Problema directe i problema invers

Les direccions principals associades als eixos x' i y' definides pels angles α i $\pi/2 + \alpha$ (vegeu la Figura 4-30), determinen les inclinacions dels dos plans sobre els quals les tensions només tenen component normal σ_α , mentre que la *component tangencial* τ_α s'anul·la. Imposant la condició esmentada en l'equació (4.71) s'obté:

$$\begin{aligned}\tau_\alpha &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin(2\alpha) - \tau_{xy} \cos(2\alpha) = 0 \Rightarrow \\ \tan(2\alpha) &= \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}} \\ \sin(2\alpha) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2(2\alpha)}}} = \pm \frac{\tau_{xy}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \\ \cos(2\alpha) &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(2\alpha)}} = \pm \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}\end{aligned}\quad (4.72)$$

NOTA

La tercera direcció principal és la perpendicular al pla d'anàlisi (eix z o x_3), vegeu l'equació (4.63) i la Figura 4-28.

L'equació (4.72) proporciona dues solucions (associades als signes $+$ i $-$) α_1 i $\alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, que defineixen les dues direccions principals (ortogonals) al pla d'anàlisi. Les tensions principals corresponents s'obtenen substituint l'angle $\theta = \alpha$ de l'equació (4.72) en l'equació (4.71), que dona com a resultat:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos(2\alpha) + \tau_{xy} \sin(2\alpha) \quad (4.73)$$

$$\sigma_\alpha \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{cases} \quad (4.74)$$

4.7.3 Problema invers

El problema consisteix a obtenir, donades les direccions i tensions principals σ_1 i σ_2 al pla d'anàlisi, les tensions sobre qualsevol pla, caracteritzat per l'angle β que forma la seva normal amb la direcció principal corresponent a σ_1 . Com a cas particular es poden obtenir els components del tensor de tensions sobre el rectangle elemental associat al sistema d'eixos $x - y$ (vegeu la Figura 4-30).

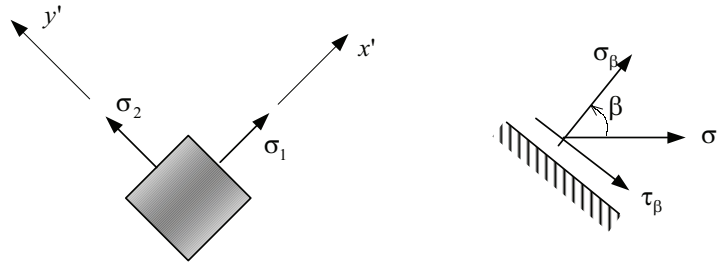


Figura 4-31 – Problema invers

Considerant ara el sistema cartesià $x' - y'$, associat a les direccions principals (vegeu la Figura 4-31), i aplicant l'equació (4.71) amb $\sigma_{x'} = \sigma_1$, $\sigma_{y'} = \sigma_2$, $\tau_{x'y'} = 0$ i $\theta \equiv \beta$, s'obté:

$$\begin{aligned} \sigma_\beta &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\beta) \\ \tau_\beta &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\beta) \end{aligned} \quad (4.75)$$

4.7.4 Cercle de Mohr per a estats plans (en dues dimensions)

Considerem ara tots els plans possible que passin pel punt P i els valors de les tensions normal i tangencial, σ_θ i τ_θ , definits en l'equació (4.71) per a tots els valors possibles de $\theta \in [0, 2\pi]$. Podem caracteritzar ara l'estat tensional en el punt sobre un pla d'inclinació θ mitjançant la parella:

$$(\sigma = \sigma_\theta, \tau = \tau_\theta) \rightarrow \begin{cases} \sigma \in \mathbb{R} \\ \tau \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.76)$$

que, al seu torn, determina un punt $(x \equiv \sigma, y \equiv \tau) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ del pla $\sigma - \tau$ de la Figura 4-32. Per determinar el lloc geomètric dels punts del pla esmentat que

caracteritzen tots els estats tensionals possibles, sobre plans que passin pel punt d'anàlisi, es procedeix com segueix:

Considerant un sistema de referència que coincideixi amb les direccions principals (com en la Figura 4-31) i caracteritzant la inclinació dels plans per l'angle β amb la tensió principal σ_1 , de l'equació (4.75) s'obté el següent:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\beta) \Rightarrow \sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos(2\beta) \\ \tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\beta) \end{aligned} \right\} \quad (4.77)$$

i elevant al quadrat les dues equacions i sumant-les queda:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \quad (4.78)$$

S'observa que l'equació (4.78), que serà vàlida per a qualsevol valor de l'angle β , o, el que és el mateix, per a qualsevol pla d'orientació arbitrària que passi pel punt, correspon a una circumferència amb centre C i radi R al pla $\sigma - \tau$ donats per (vegeu la Figura 4-32):

$$C = \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right) \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad (4.79)$$

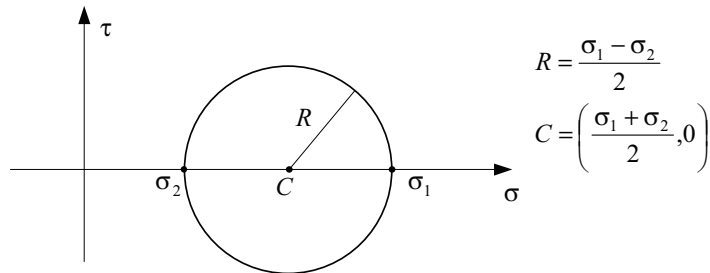


Figura 4-32 – Cercle de Mohr per a estats plans de tensió

En conseqüència, el lloc geomètric dels punts representatius de l'estat tensional sobre plans que passen per P és un cercle (denominat *cercle de Mohr*), la construcció del qual queda definida en la Figura 4-32.

La proposició inversa també és certa: donat un punt del cercle de Mohr, amb coordenades (σ, τ) , existeix un pla que passa per P les tensions normal i tangencial del qual són σ i τ , respectivament. En efecte, de l'equació (4.77) es pot obtenir:

$$\cos(2\beta) = \frac{\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)}{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)} = \frac{\sigma - a}{R} ; \quad \sin(2\beta) = \frac{\tau}{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)} = \frac{\tau}{R} \quad (4.80)$$

equacions que defineixen de forma única l'angle β de la normal a un pla (amb la tensió principal σ_1) al qual corresponen les tensions esmentades. La Figura 4-33 proporciona, a més, una interpretació de l'angle 2β sobre mateix el cercle de Mohr.

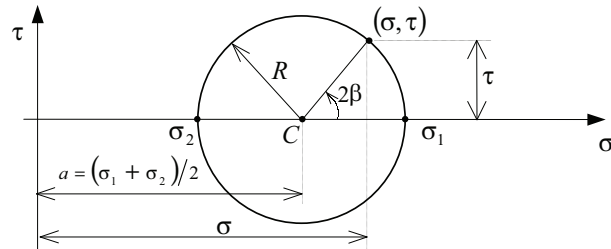


Figura 4-33 – Interpretació de l'angle β

4.7.5 Propietats del cercle de Mohr

- a) Per obtenir el punt representatiu en el cercle de Mohr de l'estat tensional sobre un pla en què la normal forma un angle β amb la direcció principal σ_1 :

Es parteix del punt representatiu del pla on actua la direcció principal σ_1 (punt $(\sigma_1, 0)$) i es gira un angle 2β en el sentit que va des de σ_1 a σ_β (vegeu la Figura 4-33 i Figura 4-34).

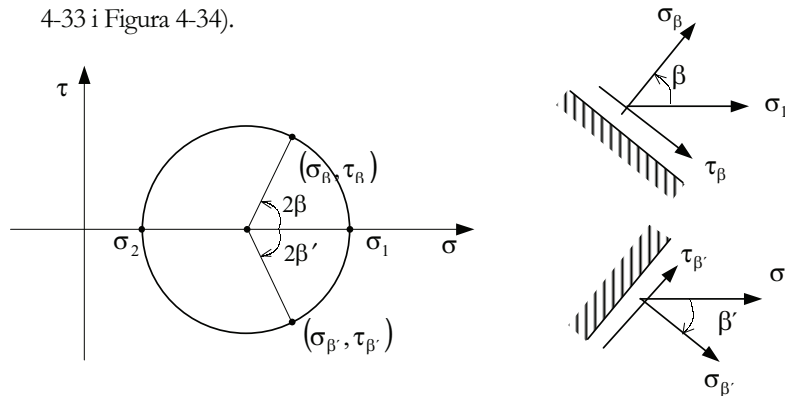


Figura 4-34

- b) Els punts representatius en el cercle de Mohr de dos plans ortogonals estan alineats amb el centre del cercle (conseqüència de la propietat a) per a $\beta_2 = \beta_1 + \frac{\pi}{2}$, vegeu la Figura 4-35.

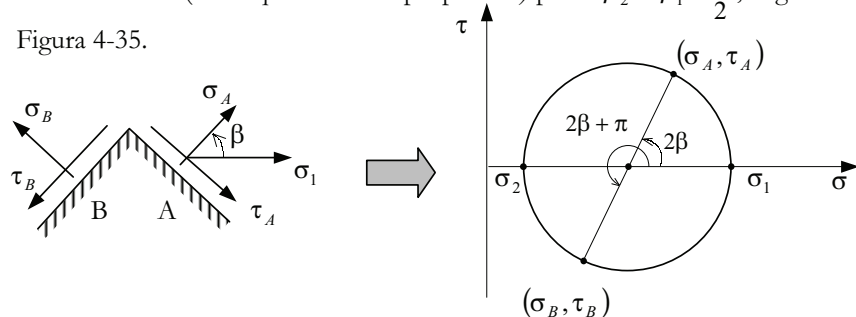


Figura 4-35

- c) Si es coneix l'estat tensional en dos plans ortogonals es pot dibuixar el cercle de Mohr.

En efecte, per la propietat b) els punts representatius dels dos plans al pla $\sigma - \tau$ estan alineats amb el centre de cercle de Mohr. En conseqüència, unint tots dos punts, la intersecció amb l'eix σ proporciona el centre de cercle. Ja que, a més, es coneixen dos punts de cercle, es pot traçar aquest.

- d) Donats els components del tensor de tensions, en una determinada base ortonormal, es pot dibuixar el cercle de Mohr.

Aquest és un cas particular de la propietat c), en la qual es coneixen els punts representatius de l'estat tensional sobre els plans cartesianes (vegeu la Figura 4-36). Observeu, en la figura esmentada, com es poden calcular el radi i els punts diametral del cercle. Observeu també que l'aplicació de la propietat a), per al punt representatiu del pla perpendicular a l'eix x , suposa moure's en sentit contrari a l'angle α (angle de σ_x amb $\sigma_1 = -$ angle de σ_1 amb $\sigma_x = -\alpha$).

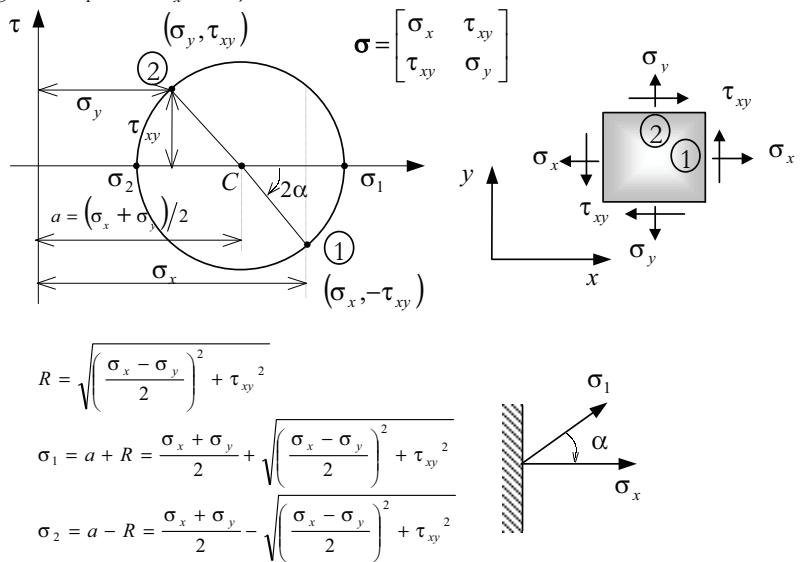


Figura 4-36

4.7.6 El pol del cercle de Mohr

Teorema

En el cercle de Mohr hi ha un punt denominat *pol* que té les propietats següents:

- Si s'uneix el pol P amb un altre punt A del cercle de Mohr, s'obté una recta que és paral·lela al pla de l'estat tensional que representa el punt A (vegeu la Figura 4-37).
- La inversa també es verifica, és a dir, donat un pla qualsevol, si es traça pel pol P una recta paral·lela al pla esmentat, aquesta tallarà al cercle de Mohr en punt B que representa l'estat tensional del pla (vegeu la Figura 4-38).

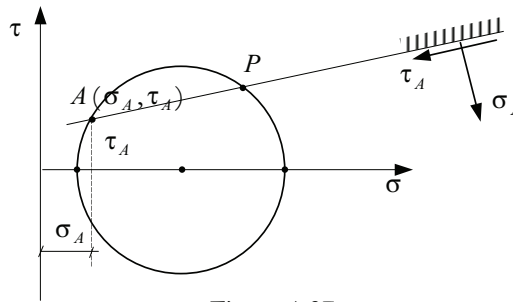


Figura 4-37

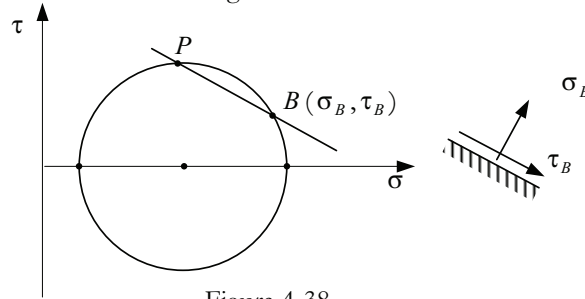


Figura 4-38

Demostració

Sigui el tensor de tensions en el punt i la seva representació gràfica sobre els plans cartesianes de la (Figura 4-39, esquerra) denominats pla A (pla vertical) i pla B (pla horitzontal). Siguin A i B els punts corresponents en el cercle de Mohr (Figura 4-39, dreta).

- 1) Suposant que es verifica la propietat a), el pol del cercle de Mohr es podria obtenir traçant des del punt A una vertical (paral·lela al pla A) i on talli al cercle de Mohr es troba el pol P. També traçant des del punt B una recta horitzontal (paral·lela al pla B) on talli al cercle de Mohr, hi hauria el pol. Es pot veure a la figura que en tots dos casos s'obté el mateix punt P.
- 2) Considerem ara un pla arbitrari la normal del qual forma un angle θ amb l'horitzontal (vegeu la Figura 4-40; esquerra) i siguin σ_θ i τ_θ les tensions normal i tangencial, respectivament, segons aquest pla. Suposem, a més, que la tensió principal major σ_1 forma un angle α amb la tensió σ_x . Llavors, la tensió σ_θ formarà un angle $\theta - \alpha$ amb la tensió principal major σ_1 .

NOTA

Observeu que, d'acord amb el criteri de signes del cercle de Mohr, la tensió tangencial sobre el pla A és $\tau = -\tau_{xy}$.

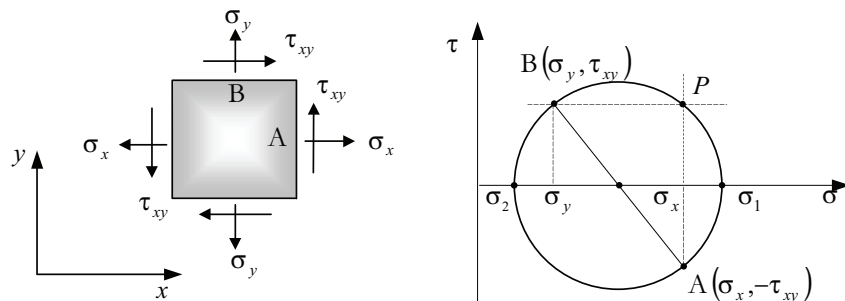
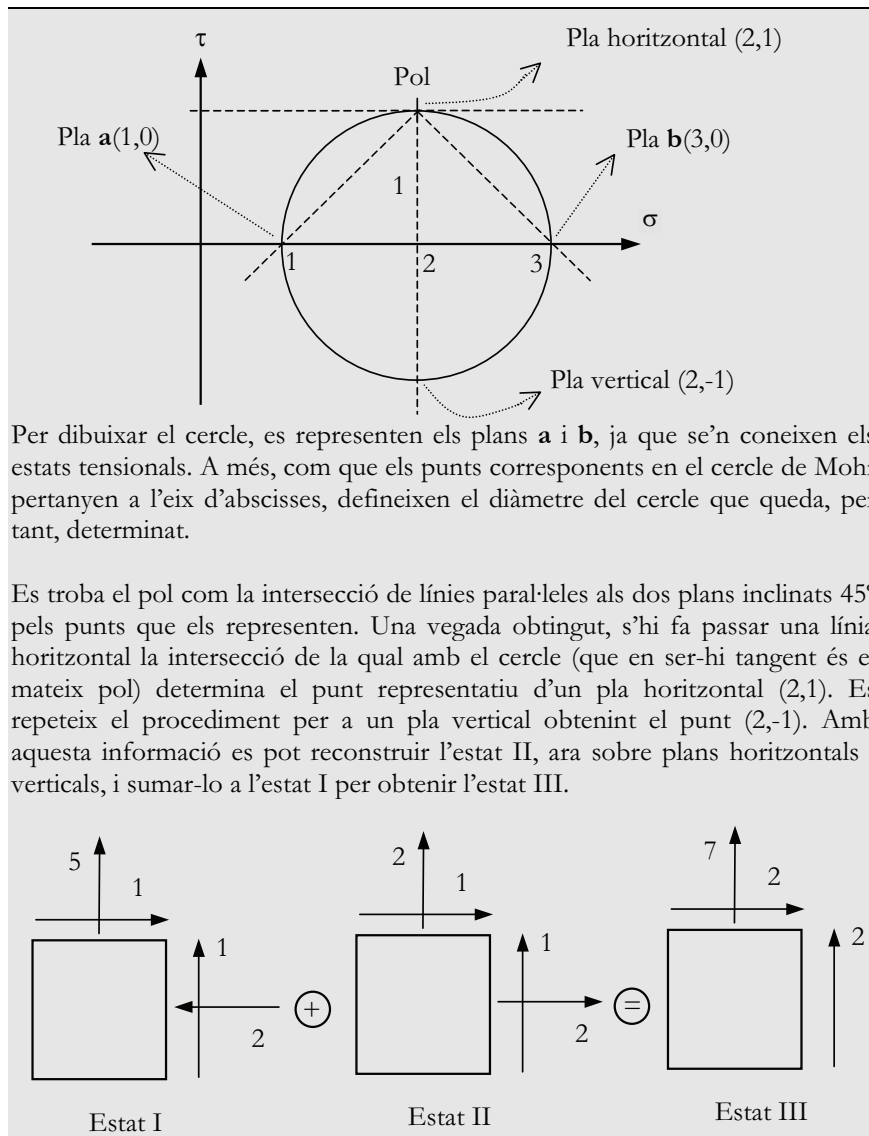


Figura 4-39



4.7.7 Cercle de Mohr amb el criteri de signes de la mecànica de sòls

En la mecànica de sòls se sol utilitzar un criteri de signes, respecte a les tensions normals i tangencials, que és contrari al que s'utilitza en la mecànica de medis continus, vegeu la Figura 4-41. Les diferències són:

- En la mecànica de sòls les tensions positives són de signe contrari (les tensions normals són positives quan són de *compressió*, i el sentit de les tensions tangencials positives ve definit per un *gir antihorari* respecte al pla).
- El criteri de signes per als angles és el mateix (angles positius antihoraris).

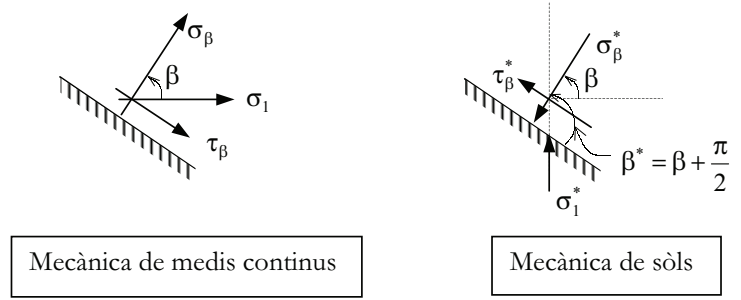


Figura 4-41

En conseqüència, si es respecta en tots dos casos l'ordenació de les tensions principals ($\sigma_1 \geq \sigma_2$), per a un mateix estat tensional l'ordre de les tensions principals s'invertirà en la mecànica de sòls respecte a la mecànica de medis continus (vegeu la Figura 4-42).

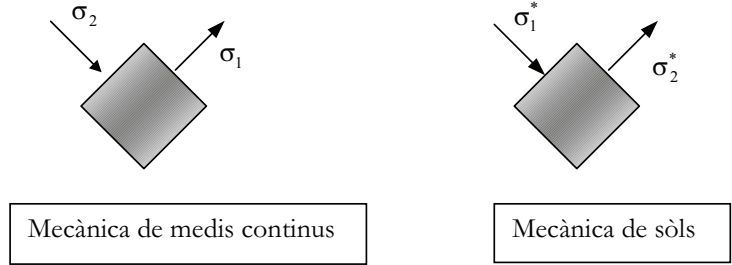


Figura 4-42

Si considerem les fórmules fonamentals (4.75), punt de partida per a la construcció i propietats del cercle de Mohr, per a un mateix estat tensional, utilitzant els criteris de signes en els dos casos, es té:

Mecànica de medis continus: $\sigma_\beta, \tau_\beta, \sigma_1, \sigma_2, \beta$

$$\text{Mecànica de sòls: } \begin{cases} \sigma_\beta^* = -\sigma_\beta \\ \tau_\beta^* = -\tau_\beta \\ \sigma_1^* = -\sigma_2 \\ \sigma_2^* = -\sigma_1 \\ \beta^* = \beta + \pi/2 \end{cases} \quad (4.81)$$

i substituint les fórmules (4.81) en les (4.75) s'obté:

$$\begin{cases} -\sigma_\beta^* = \frac{-\sigma_2^* - \sigma_1^*}{2} + \frac{-\sigma_2^* + \sigma_1^*}{2} \underbrace{\cos(2\beta^* - \pi)}_{-\cos(2\beta^*)} \\ -\tau_\beta^* = \frac{-\sigma_2^* + \sigma_1^*}{2} \underbrace{\sin(2\beta^* - \pi)}_{-\sin(2\beta^*)} \end{cases} \Rightarrow \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\beta}^* &= \frac{\sigma_1^* + \sigma_2^*}{2} + \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2} \cos(2\beta^*) \\ \tau_{\beta}^* &= \frac{\sigma_1^* - \sigma_2^*}{2} \sin(2\beta^*)\end{aligned}\quad (4.83)$$

i s'observa que les fórmules fonamentals (4.83), obtingudes sobre la base dels criteris de signes de la mecànica de sòls, són les mateixes que les (4.75), obtingudes sobre la base dels criteris de signes de la mecànica de medis continus. Per tant, *la construcció del cercle de Mohr i les seves propietats són les mateixes en tots dos casos.*

4.8 Cercles de Mohr per a casos particulars

4.8.1 Estat tensional hidrostàtic

Per a estats tensionals hidrostàtics, caracteritzats per $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$, els cercles de Mohr en tres dimensions col·lapsen en un punt (vegeu la Figura 4-43).

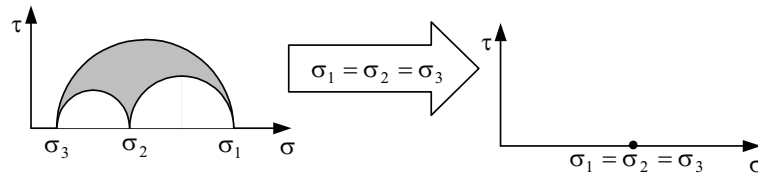


Figura 4-43

4.8.2 Cercles de Mohr d'un tensor i del seu desviador

Els cercles de Mohr en tres dimensions associats a un estat tensional i al seu desviador difereixen en una translació igual a la tensió mitjana (vegeu la Figura 4-44).

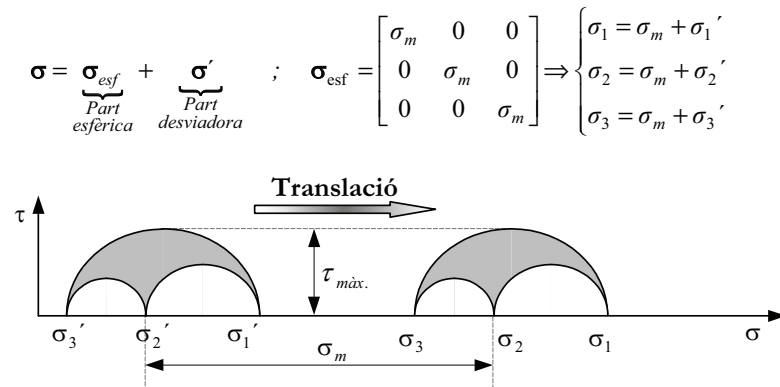


Figura 4-44

4.8.3 Cercle de Mohr per a un estat pla de tall pur

Definició

Estat pla de tall pur: Quan hi ha en el punt dos plans ortogonals sobre els que només hi ha tensió tangencial (vegeu la Figura 4-45, dreta).

El cercle de Mohr corresponent a un estat de tall pur caracteritzat per una tensió tangencial τ^* té per centre l'origen i radi $R = |\tau^*|$. La demostració és immediata a partir dels criteris de construcció del cercle de Mohr (vegeu Figura 4-45, esquerra).

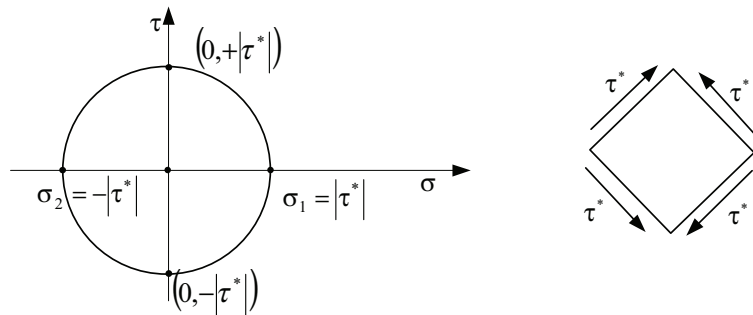


Figura 4-45 Cercle de Mohr per a un estat pla de tall pur

5 Equacions de conservació-balanç

5.1 Postulats de conservació-balanç

La mecànica de medis continus s'estableix en una sèrie de postulats o principis generals que se suposen vàlids sempre, independentment del tipus de material i del rang de desplaçaments o de deformacions, entre els quals hi ha els denominats *postulats de conservació-balanç*, que són els següents:

- Conservació de la massa.
- Balanç del moment cinètic (o quantitat de moviment).
- Balanç del moment angular (o moment de la quantitat de moviment).
- Balanç de l'energia (o primer principi de la termodinàmica).

A aquestes lleis de conservació-balanç cal afegir una restricció (que no es pot entendre rigorosament com un postulat de conservació-balanç) introduïda pel:

- Segon principi de la termodinàmica.

5.2 Flux per transport de massa o flux convectiu

En mecànica de medis continus, s'associa el terme *convecció* al *moviment de la massa* del medi que es deriva del moviment de les seves partícules. Atès que el medi continu està format per partícules, algunes de les propietats de les quals estan associades a la quantitat de massa (pes específic, moment cinètic, energia cinètica, etc.), en moure's les partícules i transportar-se les seves masses es produeix un transport de les propietats esmentades denominat *transport convectiu* (vegeu la Figura 5-1).

Sigui \mathcal{A} una propietat arbitrària del medi continu (de caràcter escalar, vectorial o tensorial) i $\Psi(\mathbf{x}, t)$ la quantitat de la propietat esmentada *per unitat de massa* del medi continu. Considerem una superfície de control (fixa en l'espai) S (vegeu la Figura 5-2). A causa del moviment de les partícules del medi, aquestes travessen al llarg del temps la superfície esmentada i, com a conseqüència, hi ha una certa quantitat de la propietat \mathcal{A} que, associada al transport de massa, travessa la superfície de control S per unitat de temps.

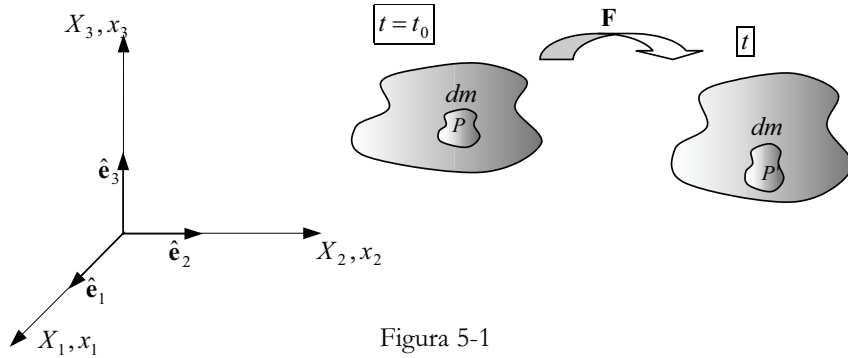


Figura 5-1

Definició

Flux convectiu. Es defineix com a flux convectiu (o flux per transport de massa) d'una propietat genèrica \mathcal{A} a través d'una superfície de control S la quantitat de \mathcal{A} que, a causa del transport de massa, travessa la superfície S per unitat de temps.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Flux convectiu de } \mathcal{A} \\ \text{a través de } S \end{array} \right\} \stackrel{\text{not}}{=} \Phi_S = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A} \text{ que travessa } S}{\text{unitat de temps}}$$

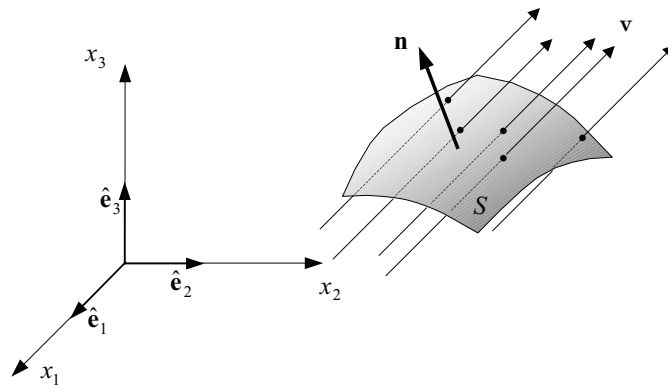


Figura 5-2 – Flux convectiu a través d'una superfície de control

Per obtenir l'expressió matemàtica del flux convectiu de \mathcal{A} a través de la superfície S , considerarem un element diferencial de superfície dS i el vector de velocitats \mathbf{v} de les partícules que en l'instant t estan sobre dS (vegeu la Figura 5-3). En un diferencial de temps dt , aquestes partícules hauran recorregut un trajecte $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$, de manera que en l'instant de temps $t+dt$ ocuparan una nova posició en l'espai. Si es consideren totes les partícules que han travessat dS en l'interval $[t, t+dt]$, aquestes ocuparan el cilindre generat en traslladar la base dS sobre la generatriu $d\mathbf{x} = \mathbf{v}dt$, el volum de la qual ve donat per:

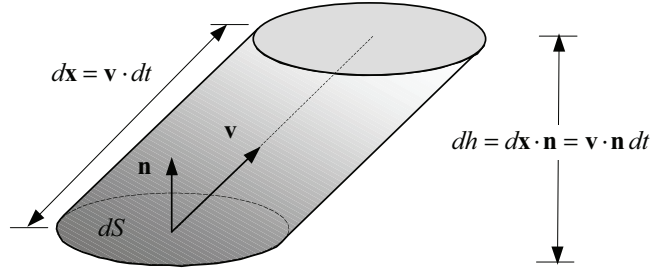


Figura 5-3

$$dV = dS \cdot dh = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dt \, dS \quad (5.1)$$

Coneixent el volum (dV) de partícules que travessen dS en l'interval de temps $[t, t + dt]$, podem obtenir la massa que travessa dS en l'interval, multiplicant (5.1) per la densitat:

$$dm = \rho \, dV = \rho \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dt \, dS \quad (5.2)$$

i, finalment, es pot obtenir la quantitat de \mathcal{A} que travessa dS en l'interval de temps $[t, t + dt]$, multiplicant (5.2) per la funció Ψ (quantitat de \mathcal{A} per unitat de massa):

$$\Psi \, dm = \rho \, \Psi \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dt \, dS \quad (5.3)$$

Dividint per dt l'expressió (5.3), obtindrem la quantitat de la propietat que travessa la diferencial de superfície de control dS *per unitat de temps*:

$$d\Phi_S = \frac{\Psi \, dm}{dt} = \rho \, \Psi \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5.4)$$

Integrant l'equació (5.4) sobre la superfície de control S , tindrem la quantitat de la propietat \mathcal{A} que travessa la totalitat de la superfície S per unitat de temps, és a dir, *el flux convectiu de la propietat \mathcal{A} a través de S* :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Flux convectiu de} \\ \mathcal{A} \text{ a través de } S \end{array} \right\} \rightarrow \Phi_S = \int_S \rho \, \Psi \, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5.5)$$

Exemple 5-1 Calculeu la magnitud Ψ i el flux convectiu Φ_S corresponent a les propietats següents: a) el volum, b) la massa, c) la quantitat de moviment, d) l'energia cinètica.

- 1) Sigui la propietat \mathcal{A} el volum de les partícules. Llavors Ψ serà volum per unitat de massa (l'invers de la densitat) i:

$$\left[\mathcal{A} \equiv V, \quad \Psi = \frac{1}{\rho}, \quad \Phi_S = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \text{Cabal} \right]$$

- 2) Sigui la propietat \mathcal{A} la massa. Llavors Ψ serà la massa per unitat de massa (és a dir, la unitat):

$$\mathcal{A} \equiv M, \quad \Psi = 1, \quad \Phi_S = \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

- 3) Sigui la propietat \mathcal{A} la quantitat de moviment (= massa \times velocitat). Llavors Ψ serà la velocitat (quantitat de moviment per unitat de massa):

$$\mathcal{A} \equiv m \mathbf{v}, \quad \Psi = \mathbf{v}, \quad \Phi_S = \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS$$

(Observeu que en aquest cas Ψ i el flux convectiu Φ_S tenen caràcter vectorial).

- 4) Sigui la propietat \mathcal{A} l'energia cinètica:

$$\mathcal{A} \equiv \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2, \quad \Psi = \frac{1}{2} \mathbf{v}^2, \quad \Phi_S = \int_S \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \, dS$$

NOTA

Llevat que s'indiqui el contrari, quan es tracti amb superfícies tancades es prendrà el sentit de la normal \mathbf{n} cap a l'exterior de la superfície.

Observació 5-1

Per a una superfície de control tancada $S = \partial V$, l'expressió del flux per transport de massa flux convectiu correspon al *flux net sortint*, definit com a *flux sortint menys el flux entrant* (vegeu la Figura 5-4).

$$\text{Flux convectiu net de } \mathcal{A} = \Phi_{\partial V} = \int_{\partial V} \rho \Psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

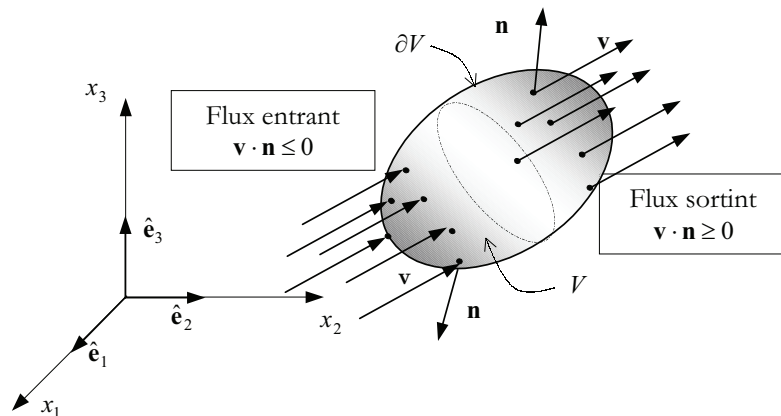


Figura 5-4 – Flux convectiu net a través d'una superfície de control tancada

Observació 5-2

El flux convectiu de qualsevol propietat a través d'una superfície material és nul.
 En efecte, el flux convectiu està associat, per definició, al transport de massa (de partícules) i, d'altra banda, una superfície material està formada sempre per les mateixes partícules i no pot ser travessada per aquestes. En conseqüència, no hi ha transport de massa a través d'una superfície material i, per tant, no existeix flux convectiu a través seu.

Observació 5-3

Flux no convectiu

Algunes propietats es poden transportar al si d'un medi continu de forma no necessàriament associada al moviment de la massa. La forma de transport esmentada *no convectiu* rep diversos noms (conducció, difusió, etc.) depenent del problema físic de què es tracti. Un exemple típic és el flux de calor per conducció.

El transport no convectiu d'una propietat queda caracteritzat pel denominat *vector o tensor de flux no convectiu* $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ que permet definir el flux (no convectiu) a través d'una superfície S de normal \mathbf{n} com:

$$\text{Flux no convectiu} = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

5.3 Derivada local i derivada material d'una integral de volum

NOTA

μ està relacionat amb

$$\Psi = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A}}{\text{unitat de massa}}$$

mitjançant $\mu = \rho \Psi$ i té el mateix ordre tensorial que la propietat \mathcal{A} .

Sigui \mathcal{A} una certa propietat (de caràcter escalar, vectorial o tensorial) d'un medi continu, i sigui μ la quantitat d'aquesta propietat genèrica \mathcal{A} per unitat de volum:

$$\mu(\mathbf{x}, t) = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A}}{\text{unitat de volum}} \quad (5.6)$$

Considerem un volum arbitrari V de l'espai. En l'instant de temps t , la quantitat total $Q(t)$ de la propietat continguda en aquest volum serà:

$$Q(t) = \int_V \mu(\mathbf{x}, t) \, dV \quad (5.7)$$

Si ara volguéssim calcular el contingut de la propietat \mathcal{A} en un altre instant $t + \Delta t$, podríem considerar les dues situacions següents:

- 1) Es tracta amb un *volum de control* V , que, per tant, està fix en l'espai i és travessat per les partícules al llarg del temps, o bé,
- 2) Es tracta amb un *volum material* que en l'instant d'interès t ocupa el volum de l'espai $V_t \equiv V$, encara que ocupa posicions diferents a l'espai al llarg del temps.

Per a cada cas obtindrem valors diferents de la quantitat $Q(t + \Delta t)$, i calculant la diferència entre les quantitats de $Q(t + \Delta t)$ i $Q(t)$ quan $\Delta t \rightarrow 0$:

$$Q'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} \quad (5.8)$$

obtidrem dues definicions *diferents* de derivades temporals que donen lloc als conceptes de *derivada local* i *derivada material* d'una integral de volum.

5.3.1 Derivada local

Definició

Derivada local d'una integral de volum. La derivada local de la integral de volum $Q(t) = \int_V \mu(\mathbf{x}, t) dV$ és la derivada temporal de $Q(t)$ quan el volum V és un volum fix en l'espai (volum de control), vegeu la Figura 5-5. S'utilitzarà la notació:

$$\text{Derivada local} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu(\mathbf{x}, t) dV$$

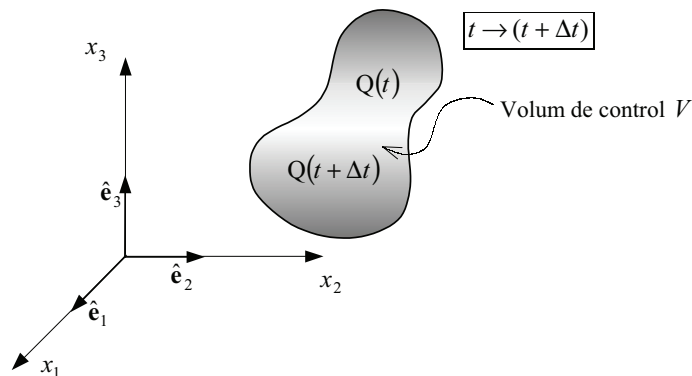


Figura 5-5 – Derivada local d'una integral de volum

La quantitat de la propietat genèrica \mathcal{A} en el *volum de control* V en els instants t i $t + \Delta t$ és:

$$Q(t) = \int_V \mu(\mathbf{x}, t) dV$$

(5.9)

$$Q(t + \Delta t) = \int_V \mu(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV$$

i utilitzant el concepte de derivada temporal de $Q(t)$ i les equacions (5.9)

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu(\mathbf{x}, t) dV = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} [Q(t + \Delta t) - Q(t)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_V \mu(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_V \mu(\mathbf{x}, t) dV \right] = \\ &= \int_V \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mu(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \mu(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} dV = \int_V \underbrace{\frac{\partial \mu(\mathbf{x}, t)}{\partial t}}_{\text{Derivada local de } \mu} dV \end{aligned} \quad (5.10)$$

d'on s'obté l'expressió matemàtica de la derivada local d'una integral de volum:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Derivada local d'una} \\ \text{integral de volum} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \frac{\partial \mu(\mathbf{x}, t)}{\partial t} dV \quad (5.11)$$

5.3.2 Derivada material

Definició

Derivada material d'una integral de volum. La derivada material de la integral de volum $Q(t) = \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV$ és la derivada temporal de

$Q(t)$ quan el volum V_t és un volum material (mòbil en l'espai), vegeu la Figura 5-5. S'utilitzarà la notació:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Derivada} \\ \text{material} \end{array} \right\} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV$$

El contingut Q d'una propietat \mathcal{A} en el volum material en els instants de temps t i $t + \Delta t$ serà:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV \\ Q(t + \Delta t) &= \int_{V_{t+\Delta t}} \mu(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV \end{aligned} \quad (5.12)$$

NOTA

Observeu que el domini d'integració no varia en considerar que el volum V és un volum de control i, per tant, fix en l'espai.

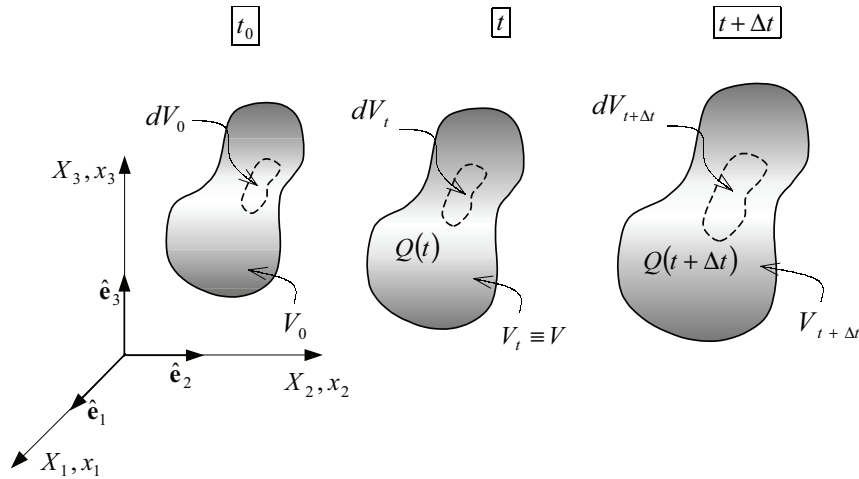


Figura 5-6 – Derivada material d'una integral de volum

NOTA

Observeu que ara els dominis d'integració són diferents en els instants t i $t + \Delta t$.

La derivada material s'expressa matemàticament com:

$$\begin{aligned}
 Q'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV \Big|_{V_t \equiv V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{Q(t + \Delta t) - Q(t)}{\Delta t} = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_{t+\Delta t}} \mu(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV - \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV \right]
 \end{aligned} \quad (5.13)$$

El pas següent consisteix a fer uns canvis de variable, adequats per a cada una de les dues integrals de l'equació (5.13), que condueixin al mateix domini d'integració. Aquest canvi de variable ve donat per les equacions de moviment $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$, particularitzades per als instants t i $t + \Delta t$:

$$\begin{cases}
 \mathbf{x}_t = \phi(\mathbf{X}, t) \rightarrow \underbrace{(dx_1 dx_2 dx_3)_t}_{dV_t} = |\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)| \underbrace{(dX_1 dX_2 dX_3)}_{dV_0} \\
 \mathbf{x}_{t+\Delta t} = \phi(\mathbf{X}, t + \Delta t) \rightarrow \underbrace{(dx_1 dx_2 dx_3)_{t+\Delta t}}_{dV_{t+\Delta t}} = |\mathbf{F}(\mathbf{X}, t + \Delta t)| \underbrace{(dX_1 dX_2 dX_3)}_{dV_0}
 \end{cases} \quad (5.14)$$

on s'ha tingut en compte la identitat $dV_t = |\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)| dV_0$. Els canvis de variable de l'equació (5.14) introduïts en l'equació (5.13) porten a:

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV = \\
 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int_{V_0} \underbrace{\mu(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t + \Delta t), t + \Delta t)}_{\bar{\mu}(\mathbf{X}, t + \Delta t)} |\mathbf{F}(\mathbf{X}, t + \Delta t)| dV_0 - \int_{V_0} \underbrace{\mu(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)}_{\bar{\mu}(\mathbf{X}, t)} |\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)| dV_0 \right] = \\
 &= \int_{V_0} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \underbrace{\frac{\bar{\mu}(\mathbf{X}, t + \Delta t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t + \Delta t) - \bar{\mu}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)}{\Delta t}}_{\frac{\partial}{\partial t} [\bar{\mu}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)]} dV_0 = \int_{V_0} \frac{d}{dt} [\mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)] dV_0
 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Finalment, desenvolupant l'últim integrant en l'equació (5.14) i tenint en compte la igualtat $\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}| \nabla \cdot \mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \frac{d}{dt} (\mu |\mathbf{F}|) dV_0 = \int_{V_0} \left(\frac{d\mu}{dt} |\mathbf{F}| + \underbrace{\frac{d|\mathbf{F}|}{dt}}_{|\mathbf{F}| \nabla \cdot \mathbf{v}} \mu \right) dV_0 =$$

$$\int_{V_0} \left(\frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \underbrace{|\mathbf{F}| dV_0}_{dV_t} = \int_{V_t} \left(\frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV$$

és a dir:

$$\left. \frac{d}{dt} \int_{V_t} \mu(\mathbf{x}, t) dV \right|_{V_t=V} \stackrel{\text{not}}{=} \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \mu(\mathbf{x}, t) dV = \int_V \left(\frac{d\mu}{dt} + \mu \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV \quad (5.17)$$

Recordant l'expressió de la derivada material d'una propietat

$\left(\frac{d\mu}{dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mu \right)$ es té finalment:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \mu(\mathbf{x}, t) dV &= \int_V \left[\frac{\partial \mu}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \mu + \mu \nabla \cdot \mathbf{v}}_{\nabla \cdot (\mu \mathbf{v})} \right] dV = \\ &= \int_V \frac{\partial \mu}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu dV + \int_V \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) dV \end{aligned} \quad (5.18)$$

on s'ha tingut en compte l'expressió de la derivada local (5.11). De l'equació (5.18) s'obté l'expressió per a la derivada material d'una integral de volum:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Derivada material} \\ \text{d'una integral} \\ \text{de volum} \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \mu(\mathbf{x}, t) dV}_{\text{Derivada material}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \mu dV}_{\text{Derivada local}} + \underbrace{\int_V \nabla \cdot (\mu \mathbf{v}) dV}_{\text{Derivada convectiva}} \quad (5.19)$$

Observació 5-4

El format de derivada material, com a suma d'una derivada local i una derivada convectiva, que apareix en *derivar propietats* del medi continu (vegeu el capítol 1, apartat 1.4) apareix també aquí en *derivar integrals* en el medi continu. De nou, la *derivada convectiva* està associada a l'existència de velocitat (o de moviment) en el medi i, per tant, a la possibilitat del transport de massa.

NOTA

Es desfa aquí el canvi de variable

$$\mathbf{x}_t = \varphi(\mathbf{X}, t).$$

NOTACIÓ

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \mu(\mathbf{x}, t) dV$$

denota la derivada temporal de la integral sobre el volum material V_t (derivada material de la integral de volum) *particularitzada en l'instant t en el qual el volum material ocupa el volum de l'espai V .*

5.4 Conservació de la massa. Equació de continuïtat

Definició

Principi de conservació de la massa. La massa del medi continu (i, per tant, la de qualsevol volum material d'aquest que es consideri) és sempre la mateixa.

Sigui un volum material V_t que en els instants de temps t i $t + \Delta t$ ocupa els volums en l'espai V_t i $V_{t+\Delta t}$ (vegeu la Figura 5-7). Sigui $\rho(\mathbf{x}, t)$ la descripció espacial de la densitat. La massa tancada pel volum material V en els instants de temps t i $t + \Delta t$ és la següent:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(t) &= \int_{V_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV \\ \mathcal{M}(t + \Delta t) &= \int_{V_{t+\Delta t}} \rho(\mathbf{x}, t + \Delta t) dV\end{aligned}\quad (5.20)$$

Pel principi de conservació de la massa es verificarà que $\mathcal{M}(t) = \mathcal{M}(t + \Delta t)$.

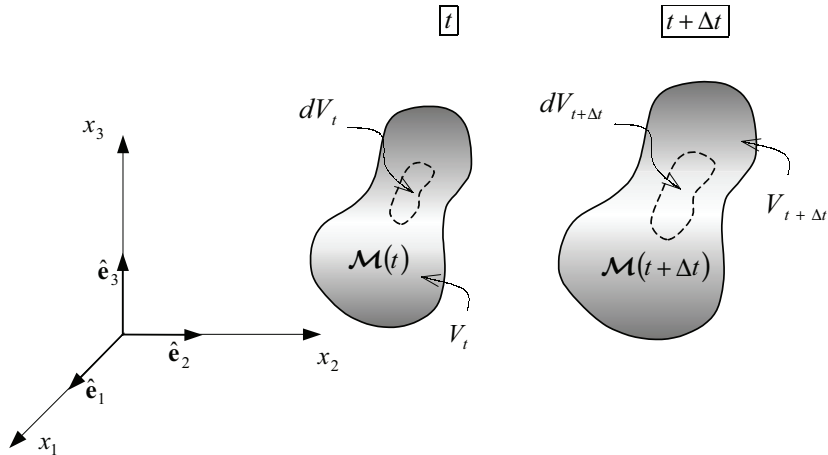


Figura 5-7

5.4.1 Forma espacial del principi de la conservació de la massa. Equació de continuïtat

L'expressió matemàtica del principi de conservació de la massa del volum material $\mathcal{M}(t)$ és que la *derivada material* de la integral (5.20) és nul·la:

$$\mathcal{M}'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho dV = 0 \quad \forall t \quad (5.21)$$

Utilitzant l'expressió de la derivada material d'una integral de volum (5.17), la forma integral (o global) espacial de l'equació de conservació de massa resulta:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma global} \\ \text{espacial de la} \\ \text{conservació} \\ \text{de la massa} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_t(\Delta V_t)} \rho dV = \int_{V_t(\Delta V_t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = 0 \quad \forall \Delta V_t \subset V_t \quad \forall t \quad (5.22)$$

NOTA

Aquest procediment, que permet passar d'una expressió global (o integral), com la (5.22), a una expressió local (o diferencial), com la (5.24), es denomina en mecànica de medis continus procés de *localització*.

L'expressió (5.22) s'ha de complir no solament per a V_t , sinó també per a qualsevol volum material *parcial*, $\Delta V_t \subset V_t$ que es consideri. En particular, s'ha de complir per a cada un dels volums materials elementals associats a les diferent partícules del medi que ocupen volums diferencials dV_t . Aplicant l'equació (5.22) a cada volum diferencial $dV_t \equiv dV(\mathbf{x}, t)$ s'obté:

$$\int_{dV(\mathbf{x}, t)} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV = \left[\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right] (\mathbf{x}, t) dV(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \quad \forall t \Rightarrow \quad (5.23)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \quad \forall t$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma local espacial} \\ \text{de la conservació} \\ \text{de la massa (equació de} \\ \text{continuitat)} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \quad \forall t \quad (5.24)$$

que constitueix la denominada *equació de continuïtat*. Utilitzant l'expressió de la derivada material de la descripció espacial d'una propietat ($\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho$) i substituint en l'equació (5.24):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}}_{\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (5.25)$$

que constitueix una expressió alternativa de l'equació de continuïtat:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \end{array} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in V_t \quad \forall t \quad (5.26)$$

5.4.2 Forma material del principi de la conservació de la massa

De l'equació (5.22):

RECORDATORI

Es considera aquí l'expressió, deduïda al capítol 2,

$$\frac{d|\mathbf{F}|}{dt} = |\mathbf{F}| \cdot \nabla \cdot \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) dV &= \int_{V_t} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{1}{|\mathbf{F}|} \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} \right) dV = \int_{V_t} \frac{1}{|\mathbf{F}|} \left[|\mathbf{F}| \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{d|\mathbf{F}|}{dt} \right] dV = \\ &= \int_{V_t} \frac{1}{|\mathbf{F}|} \frac{d}{dt} (\rho |\mathbf{F}|) dV = \frac{d}{dt} (\rho |\mathbf{F}|) \int_{V_t} dV = \frac{d}{dt} (\rho |\mathbf{F}|) V_t \end{aligned} \quad (5.27)$$

on ara el recinte d'integració és el volum de la configuració de referència V_0 . Atès que l'equació (5.27) s'ha de complir per a totes i cada una de les parts ΔV_0 de V_0 , es pot dur a terme un procés de localització que condueix a:

RECORDATORI

S'utilitza aquí la igualtat

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, 0) = \mathbf{1} \Rightarrow$$

$$|\mathbf{F}|_0 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [\rho |\mathbf{F}|](\mathbf{X}, t) &= 0 \quad \forall \mathbf{X} \in V_0 \quad \forall t \Rightarrow \rho |\mathbf{F}|(\mathbf{X}, t) = \rho |\mathbf{F}|(\mathbf{X}) \quad \forall t \\ \Rightarrow \underbrace{\rho(\mathbf{X}, 0) |\mathbf{F}|(\mathbf{X}, 0)}_{\substack{\text{not} \\ = \rho_0 |\mathbf{F}|_0}} &= \underbrace{\rho(\mathbf{X}, t) |\mathbf{F}|(\mathbf{X}, t)}_{\substack{\text{not} \\ = \rho_t |\mathbf{F}|_t}} \Rightarrow \rho_0 \underbrace{|\mathbf{F}|_0}_{=1} = \rho_t \underbrace{|\mathbf{F}|_t}_{=1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (5.28)$$

$$\left. \begin{aligned} &\text{Forma local material} \\ &\text{del principi de la} \\ &\text{conservació de la massa} \end{aligned} \right\} \rightarrow \rho_0(\mathbf{X}) = \rho_t(\mathbf{X}) |\mathbf{F}|_t(\mathbf{X}) \quad \forall \mathbf{X} \in V_0 \quad \forall t \quad (5.29)$$

5.5 Equació de balanç. Teorema del transport de Reynolds

Sigui \mathcal{A} una certa propietat genèrica (escalar, vectorial o tensorial) d'un medi continu, i sigui $\psi(\mathbf{x}, t)$ la quantitat d'aquesta propietat \mathcal{A} per *unitat de massa*. Per tant, $\rho\psi(\mathbf{x}, t)$ és la quantitat de la propietat per *unitat de volum*.

5.5.1 Lema de Reynolds

Considerem un volum *material* arbitrari de medi continu que en l'instant t ocupa en l'espai un volum $V_t \equiv V$. La quantitat de la propietat genèrica \mathcal{A} en el volum material V_t en l'instant t serà:

$$Q(t) = \int_{V_t \equiv V} \rho \psi dV \quad (5.30)$$

La variació al llarg del temps del contingut de la propietat \mathcal{A} en el volum material V_t vindrà donada per la derivada temporal de $Q(t)$, que utilitzant l'expressió (5.17) de la derivada material d'una integral de volum (amb $\mu = \rho\psi$) serà:

$$Q'(t) = \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \underbrace{\rho \psi}_{\mu} dV = \int_V \left[\frac{d(\rho \psi)}{dt} + \rho \psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV \quad (5.31)$$

Utilitzant l'expressió per a la derivada material d'un producte de funcions, agrupant termes i utilitzant l'equació de continuïtat (5.24):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \rho \psi dV = \\ \int_V \left[\rho \frac{d\psi}{dt} + \psi \frac{d\rho}{dt} + \rho \psi \nabla \cdot \mathbf{v} \right] dV = \int_V \left[\rho \frac{d\psi}{dt} + \psi \underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right)}_{=0 \text{ (Eq. de continuïtat)}} \right] dV \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\boxed{\text{Lema de Reynolds: } \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \rho \psi dV = \int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV} \quad (5.33)$$

5.5.2 Teorema de Reynolds

Considerem el volum arbitrari V , fix en l'espai, de la Figura 5-8. La quantitat de la propietat \mathcal{A} en aquest volum de control serà:

$$Q(t) = \int_V \rho \psi dV \quad (5.34)$$

La variació de la quantitat de la propietat \mathcal{A} en el volum material V_t , que de forma instantània coincideix en l'instant t amb el volum de control V ($V_t \equiv V$), vindrà donada per la derivada material de l'expressió (5.19) (amb $\mu = \rho\psi$) i l'equació (5.11):

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \rho \psi dV = \int_V \frac{\partial(\rho \psi)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) dV \quad (5.35)$$

Fent servir el lema de Reynolds (5.33) i el teorema de la divergència en l'expressió (5.35) s'obté el següent:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \rho \psi dV & \stackrel{\text{Lema de Reynolds}}{=} \int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV = \int_V \frac{\partial(\rho \psi)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) dV = \\ & \stackrel{\text{Teorema de la divergència}}{=} \int_V \frac{\partial(\rho \psi)}{\partial t} dV + \int_{\partial V} \rho \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (5.36)$$

expressió (5.36) que es pot reescriure com:

Teorema del transport de Reynolds		
$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \psi dV$	$=$	$\int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV - \int_{\partial V} \rho \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$
$\underbrace{\hspace{10em}}$ Variació per unitat de temps del contingut de la propietat \mathcal{A} en el volum de control V		$\underbrace{\hspace{10em}}$ Variació a causa del canvi del contingut de la propietat \mathcal{A} en les partícules de l'interior de V
		$\underbrace{\hspace{10em}}$ Variació a causa del flux convectiu net de \mathcal{A} , sortint pel contorn ∂V

(5.37)

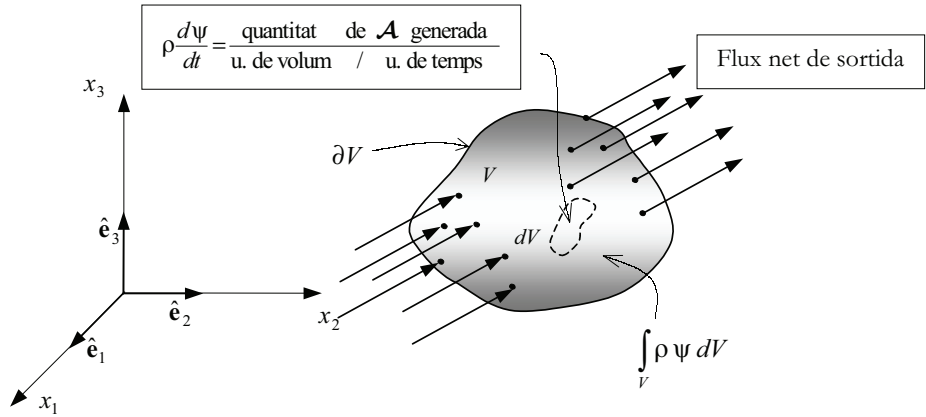


Figura 5-8

La forma local del teorema del transport de Reynolds es pot obtenir localitzant en l'equació (5.36):

$$\begin{aligned} \int_V \rho \frac{d\psi}{dt} dV &= \int_V \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} dV + \int_V \nabla \cdot (\rho\psi \mathbf{v}) dV \quad \forall \Delta V \subset V \Rightarrow \\ \rho \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\psi \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.38)$$

Forma local del teorema de transport de Reynolds	}	$\rightarrow \frac{\partial(\rho\psi)}{\partial t} = \rho \frac{d\psi}{dt} - \nabla \cdot (\rho\psi \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{x} \in V$	(5.39)
--	---	---	--------

5.6 Expressió general de les equacions de balanç

Considerem una certa propietat \mathcal{A} d'un medi continu i sigui $\psi(\mathbf{x}, t)$ la quantitat d'aquesta propietat per unitat de massa. Se suposarà, en el cas més general, que existeix una font interna de generació de la propietat \mathcal{A} i que la propietat esmentada es pot transportar tant pel moviment de la massa (transport convectiu) com per transport no convectiu. Per a això es defineix:

- Un terme font $k_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$ (del mateix ordre tensorial que la propietat \mathcal{A}) que caracteritza la generació interna de la propietat:

$$k_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A} \text{ generada interiorment}}{\text{unitat de massa/unitat de temps}} \quad (5.40)$$

- Un vector $\mathbf{j}_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t)$, de flux no convectiu per unitat de superfície (un ordre tensorial superior al de la propietat \mathcal{A}) que caracteritza el flux de la propietat a causa de mecanismes no convectius (vegeu l'Observació 5-3).

Sigui V un volum de control arbitrari (vegeu la Figura 5-9). La variació per unitat de temps de la quantitat de la propietat \mathcal{A} en el volum V es produirà per:

- 1) La generació de la propietat \mathcal{A} per unitat de temps deguda al terme font.
- 2) El flux convectiu (net-entrant) de \mathcal{A} a través de ∂V .
- 3) El flux no convectiu (net-entrant) de \mathcal{A} a través de ∂V .

$$\int_V \rho k_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A} \text{ que es genera en } V \text{ a causa de fonts internes}}{\text{unitat de temps}}$$

$$\int_{\partial V} \rho \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A} \text{ que surt per } \partial V \text{ per flux convectiu}}{\text{unitat de temps}} \quad (5.41)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{j}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{\text{quantitat de } \mathcal{A} \text{ que surt per } \partial V \text{ per flux no convectiu}}{\text{unitat de temps}}$$

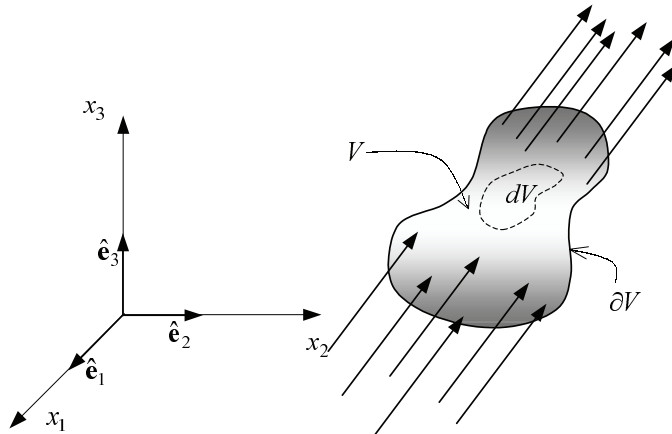


Figura 5-9

I l'equació que expressa el balanç de la quantitat de la propietat \mathcal{A} en el volum de control V s'escriu:

Forma global de l'equació de balanç	$\rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \psi dV = \underbrace{\int_V \rho k_{\mathcal{A}} dV}_{\text{Variació de la quantitat de } \mathcal{A} \text{ en } V \text{ per unitat de temps}} - \underbrace{\int_{\partial V} \rho \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Variació a causa del flux convectiu entrant}} - \underbrace{\int_{\partial V} \mathbf{j}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Variació a causa del flux no convectiu entrant}}$	$= \underbrace{\int_V \rho k_{\mathcal{A}} dV}_{\text{Variació a causa de la generació interna}} - \underbrace{\int_{\partial V} \rho \psi \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Variació a causa del flux convectiu entrant}} - \underbrace{\int_{\partial V} \mathbf{j}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{Variació a causa del flux no convectiu entrant}}$	(5.42)
-------------------------------------	--	--	--------

Fent servir el teorema de la divergència i l'equació (5.11), l'equació (5.42) es pot escriure com:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \psi dV &= \int_V \rho k_A dV - \int_V \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{j}_A dV \Rightarrow \\ \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi) + \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) \right] dV &= \int_V (\rho k_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A) dV \quad \forall \Delta V \subset V \end{aligned} \quad (5.43)$$

i localitzant en l'equació (5.43), s'obté la forma local espacial de l'equació general de balanç:

<i>Forma local espacial de l'equació general de balanç</i>			
$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \psi) + \nabla \cdot (\rho \psi \mathbf{v}) =$	$\rho \frac{d\psi}{dt}$	$=$	$\rho k_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A$
$\underbrace{\rho \frac{d\psi}{dt}}$	$\underbrace{\rho \frac{d\psi}{dt}}$ Variació de la quantitat de la propietat (per unitat de volum i de temps)	$=$	$\underbrace{\rho k_A}_{\text{Variació a causa de la generació interna de les fonts}} - \underbrace{\nabla \cdot \mathbf{j}_A}_{\text{Variació a causa del transport no convectiu}}$

(5.44)

on s'ha considerat l'equació (5.39).

Observació 5-5

L'expressió (5.42) i, especialment, la (5.44):

$$\rho \frac{d\psi}{dt} = \rho k_A - \nabla \cdot \mathbf{j}_A$$

posa de manifest la contribució negativa $(-\nabla \cdot \mathbf{j}_A)$ del flux no convectiu, a la variació del contingut de la propietat per unitat de volum i de temps $\rho \frac{d\psi}{dt}$. Només quan tot el flux és convectiu (per transport de massa) la variació esmentada procedeix únicament de la generació interna de la propietat:

$$\rho \frac{d\psi}{dt} = \rho k_A$$

Exemple 5-2 Si associem la propietat \mathcal{A} amb la massa, $\mathcal{A} \equiv \mathcal{M}$, tindrem:

- El contingut de \mathcal{A} per unitat de massa (massa/unitat de massa) és $\psi = 1$.
- El terme font de generació de massa és $k_{\mathcal{M}} = 0$, atès que no és possible generar massa (pel principi de conservació de la massa).
- El vector de flux no convectiu de massa és $\mathbf{j}_{\mathcal{M}} = 0$, atès que no es pot transportar massa de forma no convectiva.

Llavors, l'equació (5.44) (balanç de la generació de massa) queda:

$$\rho \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

que és una de les formes de l'equació de continuïtat (vegeu l'equació (5.26)).

5.7 Balanç de la quantitat de moviment

Suposeu un sistema discret format per n partícules de manera que la partícula i té una massa m_i , una acceleració \mathbf{a}_i i està sotmesa a una força \mathbf{f}_i (vegeu la Figura 5-9).

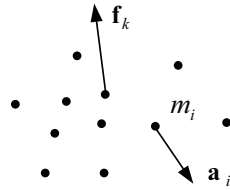


Figura 5-9

La segona llei de Newton estableix que la força que actua sobre una partícula és igual a la massa d'aquesta per la seva acceleració. Fent servir la definició d'acceleració com a derivada material de la velocitat i tenint en compte el principi de conservació de la massa (la variació de la massa de la partícula és igual a zero) es té:

$$\mathbf{f}_i = m_i \mathbf{a}_i = m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) \quad (5.45)$$

Definint la *quantitat de moviment de la partícula* com el producte de la seva massa per la seva velocitat ($m_i \mathbf{v}_i$), l'equació (5.45) expressa que la força que actua sobre la partícula és igual a la variació de la quantitat de moviment d'aquesta.

Aplicant ara la segona llei de Newton al sistema discret format per n partícules tindrem el següent:

$$\mathbf{R}(t) = \sum_i \mathbf{f}_i = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i m_i \mathbf{v}_i}_{\substack{\mathcal{P} = \\ \text{quantitat de} \\ \text{moviment}}} = \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} \quad (5.46)$$

Observeu que, de nou, per obtenir l'última expressió de (5.46), s'ha fet servir el principi de conservació de la massa ($\frac{dm_i}{dt} = 0$). L'equació (5.46) expressa que *el resultant \mathbf{R} de totes les forces que actuen sobre el sistema discret de partícules és igual a la variació per unitat de temps de la quantitat de moviment \mathcal{P} d'aquest*. Aquest postulat rep el nom de *principi del balanç de la quantitat de moviment*.

Observació 5-6

Si el sistema es troba en equilibri $\mathbf{R} = \mathbf{0}$ i:

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \Rightarrow \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \mathcal{P} = \text{cte}$$

es parla llavors de la *conservació* de la quantitat de moviment.

5.7.1 Forma global del principi de balanç de la quantitat de moviment

Aquests conceptes, corresponents a la mecànica clàssica, es poden estendre ara a la mecànica de medis continus, definint la quantitat de moviment d'un volum material V_i de medi continu de massa \mathcal{M} com:

$$\mathcal{P}(t) = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{v} \frac{d\mathcal{M}}{\rho dV} = \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV \quad (5.47)$$

Definició

Principi de balanç de la quantitat de moviment: La resultant $\mathbf{R}(t)$ de totes les forces que actuen sobre un volum material del medi continu és igual a la variació per unitat de temps de la seva quantitat de moviment:

$$\mathbf{R}(t) = \frac{d\mathcal{P}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t} \rho \mathbf{v} dV$$

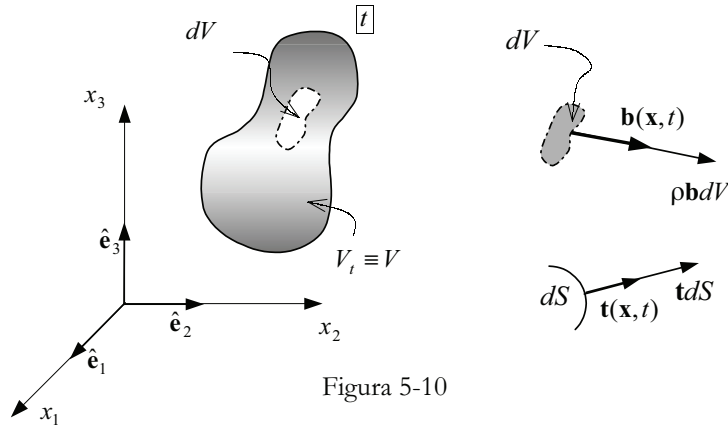


Figura 5-10

on el resultat de totes les forces que actuen en el medi continu és (vegeu la Figura 5-10):

$$\mathbf{R}(t) = \underbrace{\int_V \rho \mathbf{b} dV}_{\text{Forces massiques}} + \underbrace{\int_{\partial V} \mathbf{t} dS}_{\text{Forces de superfície}} \quad (5.48)$$

Aplicant l'equació del balanç de la quantitat de moviment amb la resultant (5.48) s'obté la forma integral del balanç de la quantitat de moviment:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma global del principi} \\ \text{de balanç de la quantitat} \\ \text{de moviment} \end{array} \right\} \rightarrow \int_V \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} dS = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho \mathbf{v} dV \quad (5.49)$$

5.7.2 Forma local del principi de balanç de la quantitat de moviment

Aplicant el lema de Reynolds (5.33) a l'equació (5.49) (i fent servir el teorema de la divergència), es té que:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_i=V} \rho \mathbf{v} dV &= \int_V \rho \mathbf{b} dV + \underbrace{\int_{\partial V} \underbrace{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{t}} dS}_{\text{Teorema de la divergència}} = \int_{V_i=V} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (5.50)$$

$$\int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \Rightarrow \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b}) dV = \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \quad \forall \Delta V \subset V \quad (5.51)$$

NOTA

S'identifica així l'equació de Cauchy (enunciada, però no deduïda, al capítol 4) com la *forma local espacial del principi de balanç de la quantitat de moviment*.

i localitzant en l'equació (5.51), s'obté la *forma local espacial del balanç de la quantitat de moviment*, també denominada equació de Cauchy:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Forma local espacial} \\ &\text{del balanç de la} \\ &\text{quantitat de moviment} \\ &(\text{equació de Cauchy}) \end{aligned} \right\} \rightarrow \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \mathbf{a} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \forall t \quad (5.52)$$

5.8 Balanç del moment de la quantitat de moviment (moment angular)

TERMINOLOGIA

En mecànica, se sol utilitzar també el nom de *moment angular* per designar el moment de la quantitat de moviment.

Considerem un sistema discret format per n partícules tal que per a una partícula arbitrària i , el seu vector posició és \mathbf{r}_i , la seva massa és m_i , hi actua una força \mathbf{f}_i i té una velocitat \mathbf{v}_i i una acceleració \mathbf{a}_i (vegeu la Figura 5-10). El moment respecte a l'origen de la força que actua sobre aquesta partícula serà $\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i$, i el *moment* respecte a l'origen de la *quantitat de moviment* de la partícula serà $\mathbf{L}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$. Tenint en compte la segona llei de Newton, el moment \mathbf{M}_i serà:

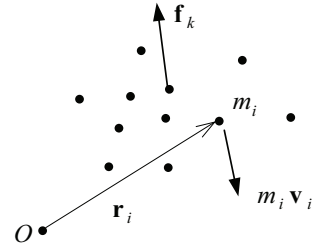


Figura 5-10

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \quad (5.53)$$

Si estenem el resultat anterior al sistema discret format per les n partícules, tindrem que el moment resultant respecte a l'origen \mathbf{M}_0 de les forces que actuen sobre el sistema de partícules és:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M}_0(t) &= \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \\ \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i &= \sum_i \underbrace{\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} \times m_i \mathbf{v}_i}_{=\mathbf{0}} + \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (5.54)$$

$$\mathbf{M}_0(t) = \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i}_{\text{Moment angular } \mathbf{L}} = \frac{d\mathbf{L}(t)}{dt}$$

NOTA

El producte vectorial d'un vector per si mateix és nul ($\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$).

L'equació (5.54) expressa que *el moment resultant \mathbf{M}_O de totes les forces que actuen sobre el sistema discret de partícules és igual a la variació per unitat de temps del moment de la quantitat de moviment* (o moment angular) $\mathcal{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ d'aquest. Aquest postulat rep el nom de *principi de balanç del moment de la quantitat de moviment*.

Observació 5-7

Si el sistema es troba en equilibri $\mathbf{M}_O(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$

$$\mathbf{M}_O(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i = \mathcal{L} = \text{cte}$$

es parla llavors de la *conservació* del moment angular.

5.8.1 Forma global del principi de balanç del moment angular

El resultat (5.54) es pot estendre a un sistema continu i infinit de partícules (el medi continu, vegeu la Figura 5-11) com segueix:

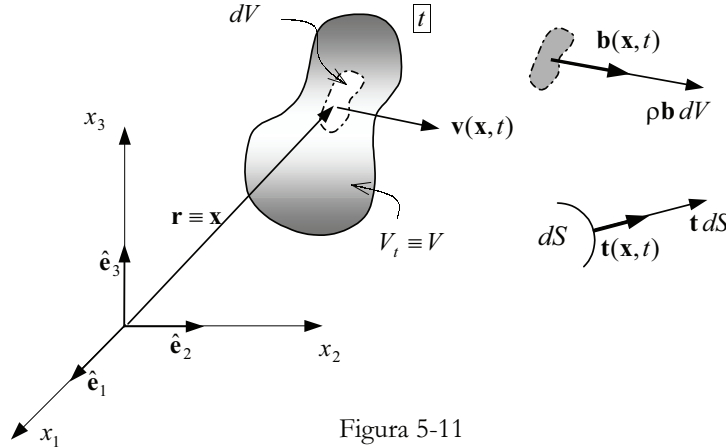


Figura 5-11

El moment angular es defineix com:

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{M}} \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, \underbrace{\rho}_{\text{densitat}} dV = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV \quad (5.55)$$

i la versió contínua del postulat del balanç del moment angular és:

Definició

Principi de balanç del moment de la quantitat de moviment o moment angular: El moment resultant, respecte a un cert punt O de l'espai, de totes les accions sobre el medi continu és igual a la variació per unitat de temps del moment de la quantitat de moviment respecte al punt esmentat.

$$\mathbf{M}_O(t) = \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV$$

Atès que el moment resultant de les forces que actuen sobre el medi continu (moment de les forces massiques i moment de les forces de superfície) té l'expressió (vegeu la Figura 5-11):

$$\mathbf{M}_O(t) = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (5.56)$$

el principi de balanç del moment de la quantitat de moviment queda:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma global espacial} \\ \text{del principi de balanç} \\ \text{del moment angular} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d}{dt} \int_{V_i=V} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS \quad (5.57)$$

5.8.2 Forma local espacial del principi de balanç del moment angular

Per obtenir la forma local espacial de l'equació de balanç es procedeix com segueix; tenint en compte el lema de Reynolds en l'equació (5.57):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V_i=V} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{v} dV &= \frac{d}{dt} \int_{V_i=V} \rho (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV = \\ &= \int_V \rho \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) dV = \int_V \rho \left(\underbrace{\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v}}_{=\mathbf{0}} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) dV = \int_V \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \end{aligned} \quad (5.58)$$

i desenvolupant l'últim terme de l'equació (5.57):

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_{\partial V} \mathbf{r} \times [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}]^T dS = \int_{\partial V} (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^T) \cdot \mathbf{n} dS = \\ \text{Teorema} \\ \text{diverg.} \\ = \int_V (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^T) \cdot \nabla dV \end{array} \right. \quad (5.59)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [(\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}^T) \cdot \nabla]_i \stackrel{\text{simb}}{=} (e_{ijk} x_j \underbrace{\sigma_{rk}^T}_{\sigma_{jk}}) \frac{\partial}{\partial x_r} = \frac{\partial}{\partial x_r} (e_{ijk} x_j \sigma_{rk}) = \\ e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_r} \sigma_{rk} + e_{ijk} x_j \frac{\partial \sigma_{rk}}{\partial x_r} = e_{ijk} \underbrace{\sigma_{jk}}_{m_i} + (\mathbf{r} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_i \quad i \in \{1,2,3\} \end{array} \right. \quad (5.60)$$

Substituint ara l'equació (5.60) en la (5.59):

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial V} \mathbf{r} \times \mathbf{t} dS = \int_V \mathbf{m} dV + \int_V (\mathbf{r} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \\ m_i = e_{ijk} \sigma_{jk} \quad i, j, k \in \{1,2,3\} \end{array} \right. \quad (5.61)$$

i substituint finalment les equacions (5.58) i (5.61) en l'equació (5.57):

$$\int_V \mathbf{r} \times \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \int_V \mathbf{r} \times \rho \mathbf{b} dV + \int_V \mathbf{m} dV + \int_V (\mathbf{r} \times \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV \quad (5.62)$$

Reordenant termes en l'equació (5.62), s'obté:

$$\int_V \mathbf{r} \times \underbrace{\left[\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right]}_{=0} dV + \int_V \mathbf{m} dV = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\int_V \mathbf{m} dV = \mathbf{0} \quad \forall \Delta V \subset V} \quad (5.63)$$

on s'ha tingut en compte que el primer integrant és nul a causa de l'equació de Cauchy (5.52) (forma local espacial de l'equació de balanç de la quantitat de moviment). Localitzant en l'equació (5.63) i considerant el valor de \mathbf{m} en l'equació (5.61), resulta:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m} &= \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V \\ m_i &= e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow e_{ijk} \sigma_{jk} = 0 \quad i, j, k \in \{1,2,3\} \quad (5.64)$$

i particularitzant l'equació (5.64) per als tres possibles valors de l'índex i :

$$\left. \begin{aligned} i=1: \quad e_{1jk} \sigma_{jk} &= \underbrace{e_{123}}_{=1} \sigma_{23} + \underbrace{e_{132}}_{=-1} \sigma_{32} = \sigma_{23} - \sigma_{32} = 0 \Rightarrow \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ i=2: \quad e_{2jk} \sigma_{jk} &= \underbrace{e_{231}}_{=1} \sigma_{31} + \underbrace{e_{213}}_{=-1} \sigma_{13} = \sigma_{31} - \sigma_{13} = 0 \Rightarrow \sigma_{31} = \sigma_{13} \\ i=3: \quad e_{3jk} \sigma_{jk} &= \underbrace{e_{312}}_{=1} \sigma_{12} + \underbrace{e_{321}}_{=-1} \sigma_{21} = \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (5.65)$$

NOTA

S'identifica així la simetria del tensor de tensions de Cauchy (enunciada, però no deduïda, al capítol 4) com la *forma local espacial del principi de balanç del moment angular*.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Forma local espacial} \\ &\text{del principi de balanç} \\ &\text{del moment angular} \end{aligned}} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad (5.66)$$

i la forma local del balanç del moment de la quantitat de moviment es tradueix en la simetria del tensor de tensions de Cauchy.

5.9 Potència

Definició

Potència: En mecànica clàssica, i també en mecànica de medis continus, es defineix la *potència* com un concepte, previ al d'energia, que es pot quantificar com la capacitat de realitzar *treball per unitat de temps*. Així, per a un sistema (o medi continu) es defineix la potència $W(t)$ entrant en aquest com:

$$W(t) = \frac{\text{Treball realitzat en el sistema}}{\text{unitat de temps}}$$

En alguns casos, no en tots, la potència $W(t)$ és una diferencial exacta d'una funció $\mathcal{E}(t)$, la qual, en els casos esmentats, rep el nom d'*energia*.

$$W(t) = \frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} \quad (5.67)$$

En el nostre cas suposarem que existeixen dos procediments pels quals el medi continu absorbeix potència del seu exterior i realitza amb aquesta potència un treball per unitat de temps:

- *Potència mecànica*: mitjançant el treball realitzat per les accions mecàniques (força massiques i superficials) que actuen sobre el medi.
- *Potència calorífica*: mitjançant l'entrada de calor en el medi.

5.9.1 Potència mecànica. Teorema de les forces vives

Definició

Potència mecànica entrant en el medi continu: treball per unitat de temps realitzat per totes les forces (massiques i de superfície) que actuen sobre aquest.

Considerem el medi continu de la Figura 5-12 sotmès a l'acció d'unes forces massiques, caracteritzades pel vector de forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, i unes forces superficials, caracteritzades pel vector de tracció $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$.

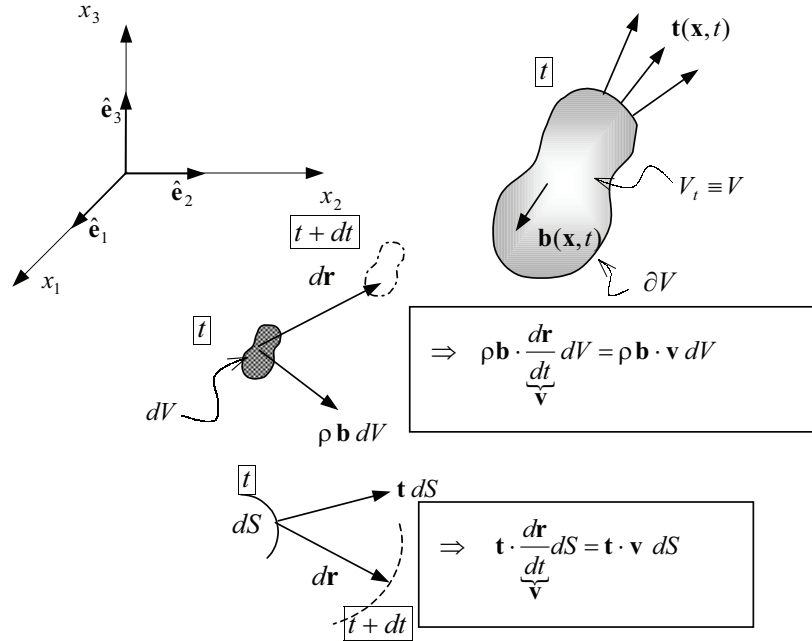


Figura 5-12

L'expressió de la potència mecànica entrant en el sistema P_e és:

$$P_e = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (5.68)$$

Aplicant el teorema de la divergència a l'últim terme de l'equació (5.68) es té:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dS = \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dV \\ \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} v_j) = \underbrace{\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}}_{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_j} v_j + \underbrace{\sigma_{ij}}_{\sigma_{ji}} \underbrace{\frac{\partial v_j}{\partial x_i}}_{(\mathbf{l})_{ji}} = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{l} \end{array} \right. \quad (5.69)$$

RECORDATORI

El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ és simètric i el tensor \mathbf{w} és antisimètric. En conseqüència, el seu producte és nul ($\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{w} = 0$).

NOTA

S'utilitza aquí l'expressió:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) &= \\ &= \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \end{aligned}$$

NOTACIÓ

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2 = v^2$$

i tenint en compte la identitat $\mathbf{l} = \mathbf{v} \otimes \nabla = \mathbf{d} + \mathbf{w}$ (vegeu el capítol 2):

$$\boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\mathbf{l}}_{\mathbf{l}=\mathbf{d}+\mathbf{w}} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{w}}_{=0} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (5.70)$$

Substituint l'equació (5.70) en la (5.69), s'obté:

$$\Rightarrow \int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v}) dS = \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV \quad (5.71)$$

Substituint l'equació (5.71) en l'equació (5.68), la potència mecànica entrant en el medi continu resulta ser:

$$\begin{aligned} P_e &= \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV = \\ &= \int_V \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b})}_{\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}} \cdot \mathbf{v} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV = \int_V \rho \underbrace{\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right)} dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV = \\ &\int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV = \int_V \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV \Rightarrow \end{aligned} \quad (5.72)$$

i aplicant el lema de Reynolds (5.33) a l'equació (5.72):

$$P_e = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV \quad (5.73)$$

Teorema de les forces vives

$$\left. \begin{array}{l} \text{Potència} \\ \text{mecànica} \\ \text{entrant} \end{array} \right\} \rightarrow P_e = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{V_t=V} \frac{1}{2} \rho v^2 dV}_{\mathcal{K}=\text{Energia cinètica}} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV}_{\text{Potència tensional}} \quad (5.74)$$

L'equació (5.74) constitueix la generalització a la mecànica de medis continus del teorema de les forces vives de la mecànica clàssica:

Definició

Teorema de les forces vives: la potència mecànica entrant en el medi continu:

$$P_e = \int_V \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\partial V} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS$$

s'inverteix en:

a) modificar l'energia cinètica de les partícules del medi continu:

$$\text{Energia cinètica} \stackrel{\text{not}}{=} \mathcal{K} = \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV \Rightarrow \frac{d\mathcal{K}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV$$

b) crear potència tensional:

$$\text{Potència tensional} \stackrel{\text{def}}{=} \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$$

Observació 5-8

En vista de l'equació (5.74), la potència tensional es pot definir com aquella part de la potència mecànica entrant en el sistema que no s'emptra a fer variar l'energia cinètica. Es pot interpretar com *el treball per unitat de temps* (potència) realitzat per les tensions en el procés de deformació del medi.

En un sòlid rígid no hi ha deformació ni velocitat de deformació ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$). En conseqüència, les tensions no realitzen treball mecànic i la potència tensional és nul·la. En aquest cas, tota la potència mecànica entrant en el sistema s'inverteix en fer variar l'energia cinètica d'aquest i es recobra el teorema de les forces vives de la mecànica del sòlid rígid.

5.9.2 Potència calorífica**Definició**

Potència calorífica entrant Q_e : És la quantitat de calor que entra, per unitat de temps, en el medi continu.

L'entrada de calor esmentada pot ser produïda per dues causes fonamentals:

- a) l'entrada de calor a causa del flux (*no convectiu*) de calor a través del contorn del volum material corresponent. Noteu que, en tractar-se d'un volum material, el flux de calor per transport de massa (convectiu) és nul i, per tant, tot el flux de calor entrant serà no convectiu,
- b) l'existència de *fonts de calor* a l'interior del medi continu.

- *Flux de calor no convectiu*

Sigui $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ la descripció espacial del vector de flux no convectiu de calor per unitat de superfície. Llavors, el flux net no convectiu de calor a través del contorn del volum material serà (vegeu la Figura 5-13):

$$\begin{aligned} \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \frac{\text{Quantitat de calor sortint}}{\text{unitat de temps}} \\ - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, dS &= \frac{\text{Quantitat de calor entrant}}{\text{unitat de temps}} \end{aligned} \quad (5.75)$$

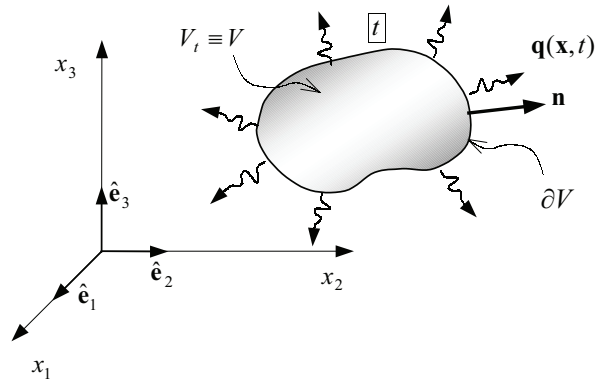


Figura 5-13

Observació 5-9

Un exemple típic de flux no convectiu és la transmissió de calor per fenòmens de *conducció*. La conducció de calor està governada per la *lleï de Fourier*, que proporciona el vector de flux de calor per conducció (no convectiva) $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$ en funció de la temperatura $\theta(\mathbf{x}, t)$:

Llei de Fourier de conducció de calor	}	$\rightarrow \mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -K \nabla \theta(\mathbf{x}, t)$
---	---	---

on K és la conductivitat tèrmica (una propietat del material).

- Fonts internes de calor

A l'interior del medi continu es pot generar (o absorbir) calor a causa de certs fenòmens (reaccions químiques, etc.). Sigui $r(\mathbf{x}, t)$ una funció escalar que descriu en forma espacial la calor generada per les fonts internes per unitat de massa i unitat de temps (vegeu la Figura 5-14). La calor entrant en el sistema, per unitat de temps, a causa de l'existència de fonts internes de calor serà:

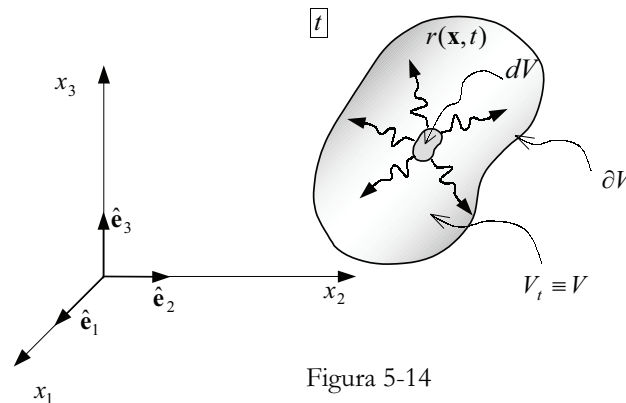


Figura 5-14

$$\int_V \rho r dV = \frac{\text{Calor generada per la font interna}}{\text{unitat de temps}} \quad (5.76)$$

En conseqüència, la calor total entrant per unitat de temps en el medi continu (o potència calorífica Q_e) vindrà donada com la suma de les contribucions del flux per conducció (5.75) i de les fonts internes (5.76):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Potència calorífica} \\ \text{entrant en el medi} \end{array} \right\} Q_e = \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.77)$$

i, ateses les equacions (5.74) i (5.77), la potència total entrant en el medi continu es pot escriure com:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Potència total entrant en el sistema} \\ P_e + Q_e = \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \frac{1}{2} \rho v^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \end{array}} \quad (5.78)$$

5.10 Balanç de l'energia

5.10.1 Conceptes de termodinàmica

- *Sistema termodinàmic*: és una determinada quantitat de matèria contínua formada sempre per les mateixes partícules (en el nostre cas un volum material).
- *Variables termodinàmiques*: conjunt de variables macroscòpiques que caracteritzen el sistema i intervenen en tots els processos físics que cal estudiar. Es designaran per $\mu_i(\mathbf{x}, t)$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- *Variables d'estat, independents o lliures*: és un subconjunt del grup de variables termodinàmiques en funció de les quals es poden expressar totes les altres.
- *Estats termodinàmics*: un estat termodinàmic queda definit en assignar un cert valor a les variables d'estat i, per tant, a totes les variables termodinàmiques. En un hiperespai (espai termodinàmic) definit per les variables termodinàmiques μ_i $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (vegeu la Figura 5-15), un estat termodinàmic vindria representat per un punt.

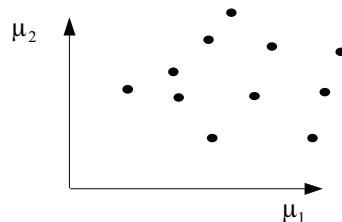


Figura 5-15 – Espai termodinàmic

- *Processos termodinàmics*: la successió contínua d'estats termodinàmics pels quals passa el sistema entre dos instants de temps t_A i t_B (és un camí o segment continu en l'espai termodinàmic, vegeu la Figura 5-16).

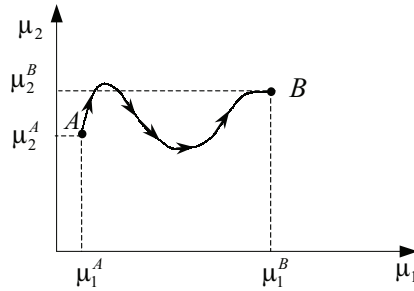


Figura 5-16 – Procés termodinàmic

- *Cicle tancat*: procés termodinàmic en el qual l'estat termodinàmic final coincideix amb l'estat termodinàmic inicial (totes les variables termodinàmiques recuperen el seu valor inicial), vegeu la Figura 5-17.

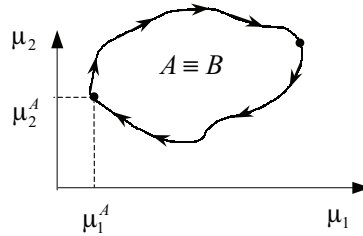


Figura 5-17 – Cicle tancat

- *Funció d'estat*: tota funció escalar, vectorial o tensorial $\phi(\mu_1 \dots \mu_n)$ de les variables termodinàmiques que es pot escriure unívocament en funció d'aquestes.

NOTA

La descripció matemàtica d'una funció $\phi(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de les variables termodinàmiques mitjançant una forma diferencial $\delta\phi$ és un fet molt comú en termodinàmica de medis continus.

Considerem un espai termodinàmic amb variables termodinàmiques $\mu_i(\mathbf{x}, t)$ $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ i una funció $\phi(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de les variables termodinàmiques esmentades definida implícitament mitjançant una forma diferencial:

$$\delta\phi = f_1(\mu_1, \dots, \mu_n)d\mu_1 + \dots + f_n(\mu_1, \dots, \mu_n)d\mu_n \quad (5.79)$$

Considerem també un determinat procés termodinàmic $A \rightarrow B$ en l'espai de les variables termodinàmiques. L'equació (5.79) proporciona el valor de la funció $\phi(\mu_1^B, \dots, \mu_n^B) = \phi_B$ conegut el seu valor $\phi(\mu_1^A, \dots, \mu_n^A) = \phi_A$ i el camí corresponent (procés termodinàmic) $A \rightarrow B$ mitjançant:

$$\phi_B = \phi_A + \int_A^B \delta\phi \quad (5.80)$$

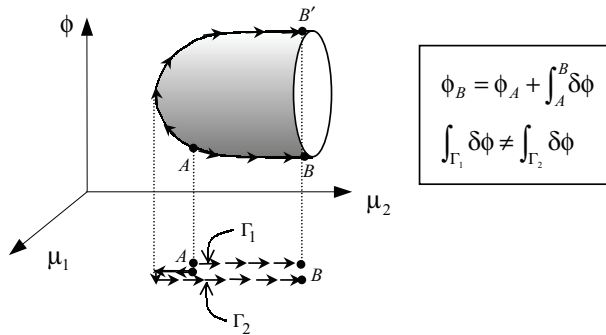


Figura 5-18 – Funció no unívoca de les variables termodinàmiques μ_1, μ_2

Tanmateix, l'equació (5.80) no garanteix que el resultat ϕ_B sigui independent del camí (procés termodinàmic) seguit. En termes matemàtics, no garanteix que la funció $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida mitjançant (5.80) sigui unívoca (vegeu la Figura 5-18) i que, per tant, existeixi una sola imatge $\phi(\mu_1, \dots, \mu_n)$ per a cada punt de l'espai termodinàmic (vegeu la Figura 5-18).

Observació 5-10

Per tal que una funció $\phi(\mu_1, \dots, \mu_n)$, descrita implícitament mitjançant una forma diferencial $\delta\phi$, sigui una *funció d'estat* (és a dir, unívoca), la forma diferencial esmentada ha de ser una *diferencial exacta* $\delta\phi = d\phi$. En altres paraules, la forma diferencial $\delta\phi$ ha de ser integrable.

La condició necessària i suficient perquè una forma diferencial com la (5.79) sigui una diferencial exacta és la igualtat de derivades creuades:

$$\left. \begin{aligned} \delta\phi &= f_1(\mu_1, \dots, \mu_n) d\mu_1 + \dots + f_n(\mu_1, \dots, \mu_n) d\mu_n \\ \frac{\partial f_i(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\partial \mu_j} &= \frac{\partial f_j(\mu_1, \dots, \mu_n)}{\partial \mu_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \delta\phi = d\phi$$

Si la forma diferencial (5.79) és una diferencial exacta, l'equació (5.80) queda:

$$\phi_B = \phi_A + \int_A^B d\phi = \phi_A + [\Delta\phi]_A^B \quad (5.81)$$

i el valor ϕ_B és independent del camí d'integració. Direm llavors que la funció ϕ és una *funció d'estat que depèn únicament dels valors de les variables d'estat* i no del procés termodinàmic.

Observació 5-11

Si ϕ és una funció d'estat, llavors $\delta\phi$ és una diferencial exacta i la integral al llarg de tot cicle tancat de la diferencial $\delta\phi$ serà nul·la:

$$\int_A^A \delta\phi = \oint d\phi = \underbrace{[\Delta\phi]_A^A}_0 = 0$$

Exemple 5-3 *Determineu si la funció $\phi(\mu_1, \mu_2)$ definida a partir de la forma diferencial $\delta\phi = 4\mu_2 d\mu_1 + \mu_1 d\mu_2$ pot ser una funció d'estat.*

Resolució

D'acord amb l'equació (5.79):

$$\left. \begin{array}{l} f_1 \equiv 4\mu_2 \\ f_2 \equiv \mu_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial \mu_2} = 4 \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mu_1} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial \mu_2} \neq \frac{\partial f_2}{\partial \mu_1}$$

i, per tant, $\delta\phi$ no és una diferencial exacta (vegeu l'Observació 5-10) i ϕ no és una funció d'estat.

5.10.2 Primer principi de la termodinàmica

L'experiència demostra que la potència mecànica (5.74) no és una diferencial exacta i que, per tant, el treball mecànic desenvolupat pel sistema en un cicle tancat no és igual a zero. El mateix passa amb la potència calorífica (5.77).

$$\left. \begin{array}{l} \delta\phi_1 = P_e dt \Rightarrow \oint P_e dt \neq 0 \\ \delta\phi_2 = Q_e dt \Rightarrow \oint Q_e dt \neq 0 \end{array} \right\} \quad (5.82)$$

Tanmateix, existeix evidència experimental que la suma de la potència mecànica més la potència calorífica, és a dir, la potència total entrant en el sistema (5.78) (vegeu la Figura 5-19), és efectivament una diferencial exacta i que, per tant, es pot definir a partir d'aquesta una *funció d'estat* \mathcal{E} que correspondrà al concepte d'energia:

$$P_e dt + Q_e dt = d\mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}(t) = \int_{t_0}^t (P_e + Q_e) dt + \text{constant} \quad (5.83)$$

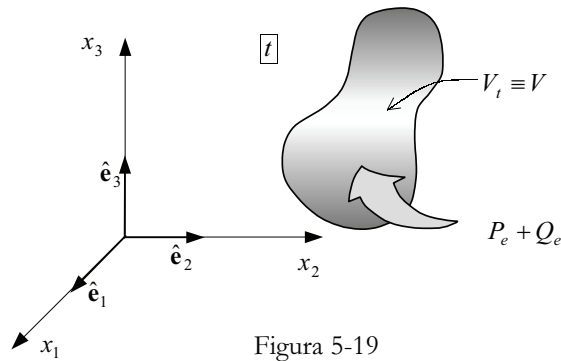


Figura 5-19

El *primer principi de la termodinàmica* estableix els postulats següents:

- 1) Existeix una *funció d'estat* \mathcal{E} , denominada *energia total del sistema*, tal que la seva variació per unitat de temps és igual a la suma de la potència mecànica més la potència calorífica entrants en el sistema:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = P_e + Q_e \quad (5.84)$$

$\frac{d\mathcal{E}}{dt}$	$=$	$\underbrace{P_e}_{\text{Treball mecànic}} dt$	$+$	$\underbrace{Q_e}_{\text{Treball calorífic}} dt$
Variació de l'energia total				

- 2) Existeix una altra *funció d'estat* \mathcal{U} denominada *energia interna* tal que:

- a) és una propietat de *caràcter extensiu*. En aquest cas es pot definir una *energia interna específica* $u(\mathbf{x}, t)$ (o energia interna per unitat de massa) tal que:

$$\mathcal{U} = \int_V \rho u dV \quad (5.85)$$

- b) la variació de l'energia total del sistema \mathcal{E} és igual a la variació de l'energia interna \mathcal{U} més la variació de l'energia cinètica \mathcal{K} :

$$\underbrace{d\mathcal{E}}_{\text{Diferencial exacta}} = d\mathcal{K} + \underbrace{d\mathcal{U}}_{\text{Diferencial exacta}} \quad (5.86)$$

NOTA

Es diu que una certa propietat és extensiva si el contingut de la propietat en el tot és la suma del contingut de la propietat a cada una de les parts. El caràcter extensiu d'una propietat permet definir el contingut de la propietat per unitat de massa (*valor específic de la propietat*) o per unitat de volum (*densitat de la propietat*).

Observació 5-12

Observeu que, atès que s'ha postulat que l'energia total del sistema \mathcal{E} i l'energia interna \mathcal{U} són funcions d'estat, $d\mathcal{E}$ i $d\mathcal{U}$ en l'equació (5.86) són diferencials exactes. En conseqüència, $d\mathcal{K} = d\mathcal{E} - d\mathcal{U}$, en l'equació esmentada, també és diferencial exacta (ja que la diferència entre dues diferencials exactes també ho és) i, per tant, és una funció d'estat. Es pot afirmar, doncs, que l'equació (5.86) postula indirectament el caràcter de funció d'estat (i, per tant) d'energia de \mathcal{K} .

A partir de l'equació (5.84) i considerant l'equació (5.78), es té:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = P_e + Q_e &= \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \\ \mathcal{K} &= \int_V \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (5.87)$$

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 dV}_{\frac{d\mathcal{K}}{dt}} + \underbrace{\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS}_{\frac{d\mathcal{U}}{dt}} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma global} \\ \text{del balanç} \\ \text{d'energia} \\ \text{interna} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \rho u dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.88)$$

Observació 5-13

De l'equació (5.88) es desprèn que tota variació, per unitat de temps, de l'energia interna $\frac{d\mathcal{U}}{dt}$ ve produïda per:

- una generació de potència tensional : $\int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV$
- una variació, per unitat de temps, del contingut de calor del medi:

$$\int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS$$

Aplicant el lema de Reynolds (5.33) i el teorema de la divergència en l'equació (5.88) es té:

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t \equiv V} \rho u dV = \int_V \rho \frac{du}{dt} dV = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} dV + \int_V \rho r dV - \int_V \nabla \cdot \mathbf{q} dV \quad \forall \Delta V \subset V \quad (5.89)$$

Finalment, localitzant en l'equació (5.89), s'obté *la forma local espacial del balanç de l'energia*:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma local} \\ \text{espacial del balanç} \\ \text{d'energia (equació} \\ \text{de l'energia)} \end{array} \right\} \rightarrow \rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \forall t \quad (5.90)$$

5.11 Processos reversibles i irreversibles

NOTA

Sistema termodinàmic aïllat: és un sistema que no pot intercanviar energia amb l'exterior. En un sentit estricte l'únic sistema perfectament aïllat és l'univers, encara que podem pensar en sistemes més petits quasi-aïllats o aïllats de forma imperfecta.

El primer principi de la termodinàmica condueix a una equació de balanç de l'energia que s'ha de complir per a tots els processos físics que es produeixen en la realitat:

$$P_e + Q_e = \frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d\mathcal{U}}{dt} + \frac{d\mathcal{K}}{dt} \quad (5.91)$$

En particular, si considerem un *sistema aïllat* (un sistema que no pot intercanviar energia amb l'exterior), la variació temporal de l'energia total del sistema serà nul·la ($\frac{d\mathcal{E}}{dt} = 0 \Rightarrow$ l'energia total es conserva) i, per tant, l'equació de balanç de l'energia (5.91), establerta pel primer principi de la termodinàmica, imposa que tota variació d'energia interna $\frac{d\mathcal{U}}{dt}$ s'ha de compensar amb una variació igual i de signe contrari d'energia cinètica $\frac{d\mathcal{K}}{dt}$ i viceversa (vegeu la Figura 5-20).

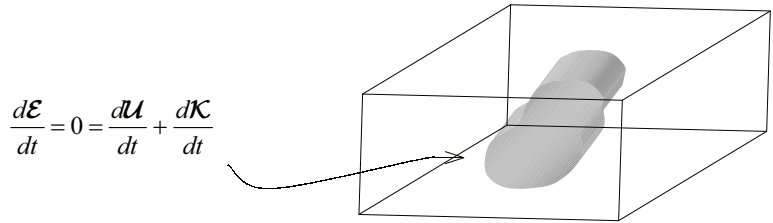


Figura 5-20 – Sistema termodinàmic aïllat

El que no diu el primer principi de la termodinàmica és si aquest intercanvi d'energies (cinètica i interna) en un sistema aïllat es pot produir indistintament en qualsevol sentit ($\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\frac{d\mathcal{K}}{dt} > 0$, o bé, $\frac{d\mathcal{U}}{dt} = -\frac{d\mathcal{K}}{dt} < 0$). És a dir, no estableix cap restricció que indiqui si un procés arbitrari i imaginari que impliqui un intercanvi d'energia en un determinat sentit és físicament possible o no. L'únic que estableix és la satisfacció del balanç d'energia (5.91) en el cas que el procés es produeixi.

Tanmateix, l'experiència demostra que, certs processos que podrien ser imaginats teòricament, no es produeixen mai en la realitat. Suposem, per exemple, el sistema aïllat de la Figura 5-21 constituït per:

- una roda rígida (no deformable) que gira amb velocitat angular ω ,
- un fre que es pot aplicar sobre la roda en un determinat instant.

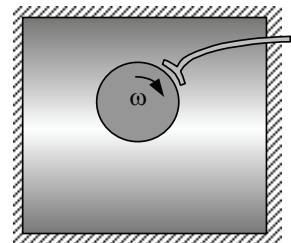


Figura 5-21

Considerem ara els dos processos següents:

NOTA

En tractar-se d'un medi no deformable, la potència tensional és nul·la (vegeu l'Observació 5-8) i tota variació de l'energia interna del sistema derivarà d'una variació del seu contingut de calor (vegeu l'Observació 5-13).

- 1) En un cert instant el fre actua, la velocitat de gir de la roda, ω , disminueix i, per tant, en disminueix l'energia cinètica ($dK < 0$). D'altra banda, a causa de la fricció entre el fre i la roda, es generarà calor i es produeix un augment de l'energia interna ($dU > 0$). L'experiència demostra que aquest procés, en el qual augmenta l'energia interna a costa de disminuir l'energia cinètica, es pot donar en la realitat i que, per tant, és un procés *físicament factible*.
- 2) Mantenint el fre sense aplicar, en un cert instant la roda augmenta espontàniament la seva velocitat de gir ω i, per tant, augmenta la seva energia cinètica ($dK > 0$). D'acord amb el primer principi disminuirà l'energia interna del sistema ($dU < 0$). Tanmateix, l'experiència demostra que aquest augment (espontani) de la velocitat de la roda no es produeix *mai* ni tampoc la disminució consegüent de la quantitat de calor del sistema (que es reflectiria en una disminució de la seva temperatura).

La conclusió davant d'aquesta observació és que *el segon procés considerat en l'exemple no és un procés físic factible*. Més generalment, per al sistema considerat només són factibles processos termodinàmics que tendeixin a augmentar l'energia interna i a disminuir l'energia cinètica i no el contrari.

Concloem, doncs, que *només quan un determinat procés físic és factible el primer principi és aplicable*, i s'adverteix la necessitat de determinar quan un determinat procés físic és factible o si un procés físic és factible en una direcció, en totes dues o en cap. La resposta a aquesta qüestió la proporciona el *segon principi de la termodinàmica*.

Les consideracions anteriors porten a classificar, des d'un punt de vista termodinàmic, els possibles processos físics en *processos factibles o no factibles* i, a més, suggereixen classificar els processos factibles en *processos reversibles i processos irreversibles*.

Definicions

Procés reversible: un procés termodinàmic $A \rightarrow B$ és reversible si és possible tornar des de l'estat termodinàmic final B a l'estat termodinàmic inicial A pel mateix camí (vegeu la Figura 5-22).

Procés irreversible: un procés termodinàmic $A \rightarrow B$ és irreversible si no és possible tornar des de l'estat termodinàmic final B a l'estat termodinàmic inicial A *pel mateix camí* (encara que s'hi pugui tornar per un camí diferent, vegeu la Figura 5-22).

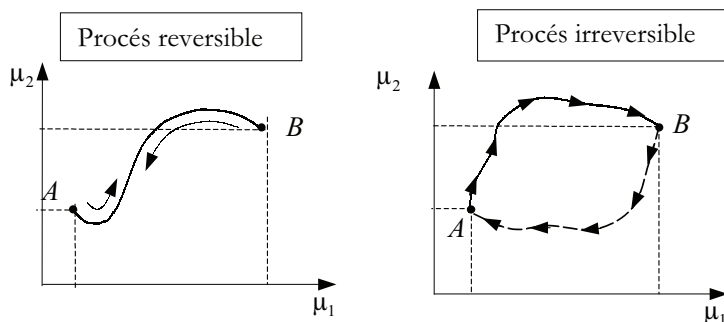


Figura 5-22 – Processos reversibles i irreversibles

En general, dins d'un mateix procés termodinàmic hi haurà trams reversibles i trams irreversibles.

5.12 Segon principi de la termodinàmica. Entropia

5.12.1 Segon principi de la termodinàmica. Forma global

El segon principi de la termodinàmica estableix els dos postulats següents:

- 1) Existeix una funció d'estat denominada *temperatura absoluta* $\theta(\mathbf{x}, t)$, que és intensiva i estrictament positiva ($\theta > 0$).
- 2) Existeix una funció d'estat denominada *entropia* S amb les característiques següents:
 - a) És una variable *extensiva* (el contingut de l'entropia en el tot és la suma del contingut en les parts). Això implica que existeix una entropia específica (entropia per unitat de massa) s tal que:

$$s = \frac{\text{entropia}}{\text{unitat de massa}} \rightarrow S = \int_V \rho s dV \quad (5.92)$$

- b) Es compleix la desigualtat següent:

Forma integral
del segon
principi de la
termodinàmica

$$\left\{ \rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho s dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS \right. \quad (5.93)$$

on :

- el signe = correspon a processos *reversibles*.
- el signe > correspon a processos *irreversibles*.

NOTA

Es diu que una certa propietat és intensiva si el contingut de la propietat en el tot no és la suma del contingut de la propietat a cada una de les parts. Al contrari del que passa amb les propietats extensives, en aquest cas no es pot definir el contingut de la propietat per unitat de massa (*valor específic de la propietat*) o per unitat de volum (*densitat de la propietat*). La temperatura és un exemple paradigmàtic de propietat intensiva.

- el signe $<$ no es pot donar i indica que el procés corresponent és *no factible*.

5.12.2 Interpretació física del segon principi de la termodinàmica

A l'apartat 5.9.2 s'ha vist que la magnitud *calor en el sistema* ve caracteritzada per:

- un terme de font (o de generació de calor per unitat de massa i de temps) $r(\mathbf{x}, t)$, definit a l'interior del volum material i
- el flux no convectiu (flux de calor per conducció) a través del contorn de la superfície material, definit mitjançant un vector de flux no convectiu per unitat de superfície $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.

Amb aquests termes es pot calcular la quantitat de calor que entra per unitat de temps en un volum material V_t , que ocupa instantàniament el volum de l'espai $V_t \equiv V$ de normal exterior \mathbf{n} , com:

$$Q_e = \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.94)$$

Considerem ara una nova magnitud definida com *calor per unitat de temperatura absoluta* en el sistema. Si $\theta(\mathbf{x}, t)$ és la temperatura absoluta, la quantitat de la magnitud esmentada vindrà caracteritzada per:

- un terme de font $\frac{r}{\theta}$ corresponent a la generació de *calor per unitat de temperatura absoluta*, per unitat de massa i unitat de temps, i
- un vector $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$ de flux no convectiu de *calor per unitat de temperatura absoluta*.

Magnitud	Terme de font	Vector de flux no convectiu
$\frac{\text{Calor}}{\text{unitat de temps}}$	r	\mathbf{q}
$\frac{\text{Calor / u. de temperatura absoluta}}{\text{unitat de temps}}$	$\frac{r}{\theta}$	$\frac{\mathbf{q}}{\theta}$

De forma paral·lela a l'equació (5.94), els nous termes font, $\frac{r}{\theta}$, i vector de flux no convectiu, $\frac{\mathbf{q}}{\theta}$, permeten calcular la quantitat de *calor per unitat de temperatura absoluta* que entra al volum material per unitat de temps com:

$$\frac{(\text{Calor/u. de temperatura}) \text{ que entra en } V}{\text{unitat de temps}} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.95)$$

Observant ara l'equació (5.95), veiem que el segon terme d'aquesta correspon precisament a la magnitud definida en l'equació (5.93). Aquesta circumstància permet interpretar el segon principi establint que *la generació d'entropia, per unitat*

de temps, en un medi continu sempre és més gran o igual que la quantitat de calor per unitat temperatura que entra en el sistema per unitat de temps.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma global} \\ \text{del segon principi} \\ \text{de la termodinàmica} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{dS}{dt} \geq \underbrace{\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS}_{\substack{\text{Quantitat de la propietat} \\ \text{"Calor /u. de temperatura absoluta"} \\ \text{que entra en el domini } V \text{ per} \\ \text{unitat de temps}}} \quad (5.96)$$

Considerem ara la descomposició de l'entropia total del sistema S en dos components diferenciats:

- $S^{(i)}$: entropia generada (produïda) interiorment pel medi continu. La seva taxa de generació temporal és $\frac{dS^{(i)}}{dt}$,
- $S^{(e)}$: entropia generada per interacció del medi continu amb el seu exterior. La seva taxa de variació temporal és $\frac{dS^{(e)}}{dt}$,

i es compleix naturalment:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS^{(e)}}{dt} + \frac{dS^{(i)}}{dt} \quad (5.97)$$

Si s'estableix ara que la variació temporal de l'entropia generada per interacció amb l'exterior coincideix amb la de la magnitud *calor per unitat de temperatura absoluta*, de l'equació (5.94) es pot escriure:

$$\frac{dS^{(e)}}{dt} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS \quad (5.98)$$

i, tenint en compte les equacions (5.96) a (5.98), la variació per unitat de temps de l'entropia generada internament serà:

$$\frac{dS^{(i)}}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{dS^{(e)}}{dt} = \frac{dS}{dt} - \left[\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} dS \right] \geq 0 \quad (5.99)$$

Observació 5-14

Segons l'equació (5.99), l'entropia de generació interna $S^{(i)}$ del sistema (medi continu) sempre augmenta ($\frac{dS^{(i)}}{dt} \geq 0$). En un sistema perfectament aïllat (estrictament parlant, només la totalitat de l'univers ho és) no hi ha interacció amb l'exterior i la variació d'entropia per interacció amb l'exterior és nul·la ($\frac{dS^{(e)}}{dt} = 0$). En aquest cas, el segon

principi estableix que $\frac{dS^{(i)}}{dt} = \frac{dS}{dt} \geq 0$, és a dir, que *l'entropia total d'un sistema perfectament aïllat sempre augmenta*. Aquest és el punt de partida d'algunes formulacions alternatives del segon principi de la termodinàmica.

5.12.3 Reformulació del segon principi de la termodinàmica

Ateses les consideracions de l'apartat 5.12.2 podem reformular el segon principi en els termes següents:

- 1) Existeix una funció d'estat denominada temperatura absoluta tal que sempre és estrictament positiva:

$$\theta(\mathbf{x}, t) > 0 \quad (5.100)$$

- 2) Existeix una funció d'estat denominada entropia que és una variable extensiva i que, per tant, es pot definir en funció d'una entropia específica (o entropia per unitat de massa) $s(\mathbf{x}, t)$ com:

$$S(t) = \int_V \rho s \, dV \quad (5.101)$$

- 3) L'entropia pot ser de generació interna, $S^{(i)}$, o produïda per interacció amb l'exterior, $S^{(e)}$. Tots dos components de l'entropia són variables extensives i el seu contingut en un volum material V es pot definir en funció dels seus valors específics respectius $s^{(i)}$ i $s^{(e)}$:

$$\begin{aligned} S^{(i)} &= \int_V \rho s^{(i)} \, dV \\ S^{(e)} &= \int_V \rho s^{(e)} \, dV \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$S = S^{(i)} + S^{(e)} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{dS^{(i)}}{dt} + \frac{dS^{(e)}}{dt} \quad (5.103)$$

i fent servir el Lema de Reynolds (5.33) en l'equació (5.103):

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(i)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho s^{(i)} \, dV = \int_V \rho \frac{ds^{(i)}}{dt} \, dV \\ \frac{dS^{(e)}}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho s^{(e)} \, dV = \int_V \rho \frac{ds^{(e)}}{dt} \, dV \end{aligned} \quad (5.104)$$

- 4) La variació d'entropia externa (generada per interacció amb l'exterior) està associada a la variació de la magnitud *calor per unitat de temperatura absoluta*, i es defineix com:

$$\frac{dS^{(e)}}{dt} = \int_V \rho \frac{r}{\theta} \, dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} \, dS \quad (5.105)$$

- 5) *L'entropia de generació interna no disminueix mai.* En funció de la variació del seu contingut durant un procés termodinàmic es defineixen les situacions següents:

$$\frac{dS^{(i)}}{dt} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} = 0 & \text{procés reversible} \\ > 0 & \text{procés irreversible} \\ < 0 & \text{procés no factible} \end{cases} \quad (5.106)$$

5.12.4 Forma local del segon principi de la termodinàmica. Equació de Clausius-Plank

Fent servir les equacions (5.102) a (5.105), l'equació (5.106) es reescriu com:

$$\frac{dS^{(i)}}{dt} = \frac{dS}{dt} - \frac{dS^{(e)}}{dt} \geq 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho s^{(i)} dV = \frac{d}{dt} \int_{V_t=V} \rho s dV - \left[\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_{\partial V} \frac{\mathbf{q}}{\theta} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right] \geq 0 \quad (5.107)$$

Aplicant el lema de Reynolds (per a la primera i segona integral del terme de l'esquerra de l'equació (5.107)) i el teorema de la divergència (en l'última integral), s'obté:

$$\int_V \rho \frac{ds^{(i)}}{dt} dV = \int_V \rho \frac{ds}{dt} dV - \left[\int_V \rho \frac{r}{\theta} dV - \int_V \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) dV \right] \geq 0 \quad \forall \Delta V \subset V \quad (5.108)$$

i localitzant en l'equació (5.108), s'arriba a la forma local del segon principi de la termodinàmica o equació de Clausius-Duhem:

Forma local del
segon principi de
la termodinàmica
(desigualtat de
Clausius-Duhem)

$$\left. \right\} \rightarrow \rho \frac{ds^{(i)}}{dt} = \rho \frac{ds}{dt} - \left(\rho \frac{r}{\theta} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) \right) \geq 0 \quad \begin{matrix} \forall \mathbf{x} \in V \\ \forall t \end{matrix} \quad (5.109)$$

On, de nou, en l'equació (5.109) el signe:

- = correspon a processos *reversibles*,
- > correspon a processos *irreversibles*,
- < indica que el procés corresponent és *no factible*.

L'equació (5.109) és susceptible de ser reelaborada com segueix:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta} \right) &= \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \\ \rho \frac{ds^{(i)}}{dt} &= \underbrace{\rho \frac{ds}{dt}}_{\substack{\text{not} \\ = \dot{s}^{(i)}}} - \underbrace{\rho \frac{r}{\theta}}_{\substack{\text{not} \\ = \dot{s}}} + \frac{1}{\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} - \frac{1}{\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (5.110)$$

$$\dot{s}^{(i)} = \underbrace{\dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho\theta} \nabla \cdot \mathbf{q}}_{\dot{s}_{local}^{(i)}} - \underbrace{\frac{1}{\rho\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta}_{\dot{s}_{cond}^{(i)}} \geq 0$$

(5.111)

Una formulació més forta (més restrictiva) del segon principi de la termodinàmica postula que l'entropia generada internament, $\dot{s}^{(i)}$, es pot generar localment, $\dot{s}_{local}^{(i)}$, o per conducció tèrmica, $\dot{s}_{cond}^{(i)}$, i que totes dues contribucions a la generació d'entropia han de ser no negatives:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Generació interna} \\ \text{local d'entropia:} \\ \text{(desigualtat de Clausius-Plank)} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{s}_{local}^{(i)} = \dot{s} - \frac{r}{\theta} + \frac{1}{\rho\theta} \nabla \cdot \mathbf{q} \geq 0 \quad (5.112)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Generació interna} \\ \text{d'entropia per} \\ \text{conducció de calor} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{s}_{cond}^{(i)} = -\frac{1}{\rho\theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \quad (5.113)$$

Observació 5-15

L'equació (5.113) es pot interpretar de la manera següent: com que la densitat, ρ , i la temperatura absoluta, θ , són magnituds positives, l'equació esmentada es pot escriure:

$$\mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0$$

que estableix que el flux no convectiu de calor, \mathbf{q} , i el gradient de temperatura, $\nabla \theta$, són vectors que tenen sentits oposats (el seu producte escalar és negatiu). En altres paraules, l'equació (5.113) és l'expressió matemàtica del fet experimentalment contrastat *que la calor flueix per conducció de les parts més calentes del medi a les més fredes* (vegeu la Figura 5-23), caracteritzant com a *no factibles* aquells processos en els quals passi el contrari.

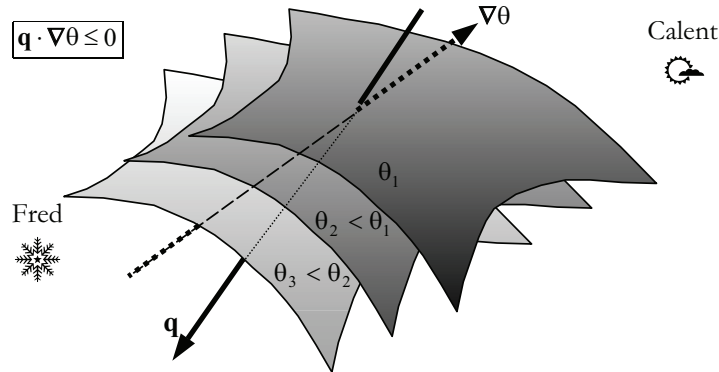


Figura 5-23 – Flux de calor oposada al gradient tèrmic

Observació 5-16

En el context de la llei de Fourier de conducció de la calor: $\mathbf{q} = -K \nabla \theta$ (vegeu l'Observació 5-9) l'equació (5.113) es pot escriure:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \leq 0 \\ \mathbf{q} = -K \nabla \theta \end{array} \right\} \Rightarrow -K |\nabla \theta|^2 \leq 0 \Rightarrow \boxed{K \geq 0}$$

posant de manifest la manca de sentit físic de valors negatius de la conductivitat tèrmica K .

5.12.5 Formes alternatives del segon principi de la termodinàmica

En mecànica de medis continus se solen utilitzar expressions alternatives de l'equació de Clausius-Plank (5.112) combinant-la amb la forma local de l'equació de balanç de l'energia (5.90).

- Equació de Clausius-Plank en funció de l'energia interna específica

Una forma usual d'expressar l'equació de Clausius-Plank és fer-ho en funció de l'energia interna específica $u(\mathbf{x}, t)$ de l'equació (5.85). Aquesta expressió s'obté fent servir la forma local espacial de l'equació de balanç d'energia (5.90):

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} = \rho \dot{u} - \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \quad (5.114)$$

i substituint-la en l'equació de Clausius-Plank (5.112):

$$\rho \theta \dot{s}_{local}^i = \rho \dot{\theta} s - [\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}] = \rho \theta \dot{s} - \rho \dot{u} + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad (5.115)$$

Equació de Clausius-Plank en funció de l'energia interna	}	$\rightarrow -\rho(\dot{u} - \theta \dot{s}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0$	(5.116)
--	---	---	---------

- Equació de Clausius-Plank en funció de l'energia lliure d'Helmholtz

Una altra possibilitat és expressar l'equació de Clausius-Plank en funció de l'energia lliure (específica) de Helmholtz $\psi(\mathbf{x}, t)$, que es defineix en funció de l'energia interna, de l'entropia i de la temperatura com:

$$\boxed{\overset{def}{\psi} = u - s\theta} \quad (5.117)$$

Derivant respecte al temps l'equació (5.117), s'obté

$$\dot{\psi} = \dot{u} - s\dot{\theta} - \dot{s}\theta \Rightarrow \dot{u} - \theta\dot{s} = [\dot{\psi} + s\dot{\theta}] \quad (5.118)$$

i substituint l'equació (5.118) en la (5.116), s'obté l'equació de Clausius-Plank en funció de l'energia lliure de Helmholtz:

$$\rho \theta \dot{s}_{local}^i = -\rho(\dot{u} - \theta\dot{s}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \quad (5.119)$$

Equació de Clausius-Plank en funció de l'energia lliure	}	$\rightarrow -\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0$	(5.120)
---	---	---	---------

Per al cas de deformació infinitesimal es té que $\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}$ (vegeu el capítol 2, observació 2-22) i substituint en l'equació (5.120) s'obté:

Equació de Clausius-Plank (deformació infinitesimal)	}	$\rightarrow -\rho(\dot{\psi} + s\dot{\theta}) + \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$	(5.121)
--	---	---	---------

5.13 Equacions de la mecànica de medis continus. Equacions constitutives

Arribats en aquest punt, resulta convenient resumir el conjunt d'equacions diferencials (locals) que proporcionen les equacions de conservació-balanç:

1) *Conservació de la massa*. Equació de continuïtat:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 \text{ equació} \quad (5.122)$$

2) *Balanç de la quantitat de moviment*. Equació de Cauchy:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i &= \rho \frac{dv_i}{dt} \quad i \in \{1,2,3\} \end{aligned} \right\} \rightarrow 3 \text{ equacions} \quad (5.123)$$

3) *Balanç del moment angular*. Simetria del tensor de tensions:

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^T \\ \sigma_{12} &= \sigma_{21} \quad ; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} \quad ; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \end{aligned} \right\} \rightarrow 3 \text{ equacions} \quad (5.124)$$

4) *Balanç de l'energia*. Primer principi de la termodinàmica:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{du}{dt} &= \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + (\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}) \\ \rho \frac{du}{dt} &= \sigma_{ij} d_{ij} + \left(\rho r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 \text{ equació} \quad (5.125)$$

5) *Segon principi de la termodinàmica*. Desigualtat de Clausius-Plank i del flux de calor:

$$\left. \begin{aligned} -\rho(\dot{u} - \theta \dot{s}) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} &\geq 0 \\ -\rho(\dot{u} - \theta \dot{s}) + \sigma_{ij} d_{ij} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 \text{ restricció}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta &\geq 0 \\ -\frac{1}{\rho \theta^2} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow 1 \text{ restricció} \quad (5.126)$$

que sumen un total de 8 equacions diferencials en derivades parcials (EDP) i dues restriccions.

NOTA

No es comptabilitzen com a incògnites els sis components diferents del tensor velocitat de deformació \mathbf{d} , a les equacions (5.125) i (5.126), ja que se suposen implícitament calculables en funció de la velocitat \mathbf{v} mitjançant la relació:

$$\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \nabla^s \mathbf{v}$$

(vegeu el capítol 2, apartat 2.13.2).

Fent un recompte del nombre d'incògnites que intervenen en les equacions esmentades es té.

$$\left. \begin{array}{l} \rho \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ \mathbf{v} \rightarrow 3 \text{ incògnites} \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow 9 \text{ incògnites} \\ u \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ \mathbf{q} \rightarrow 3 \text{ incògnites} \\ \theta \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ s \rightarrow 1 \text{ incògnita} \end{array} \right\} 19 \text{ incògnites}$$

És evident, per tant, que caldran equacions addicionals per resoldre el problema. Aquestes equacions, que reben el nom genèric d'*equacions constitutives* i que són pròpies del material que constitueix el medi continu, són:

6) *Llei de Fourier de conducció de la calor:*

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{q} = -K \nabla \theta \\ q_i = -K \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right\} \rightarrow 3 \text{ equacions} \quad (5.127)$$

7) *Equacions constitutives (pròpiament dites):*

$$\begin{array}{l} \text{Eq. constitutives} \\ \text{termomecàniques:} \end{array} \rightarrow f_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad i \in \{1, \dots, 6\} \rightarrow 6 \text{ equacions} \quad (5.128)$$

$$\begin{array}{l} \text{Eq. constitutiva} \\ \text{de l'entropia:} \end{array} \rightarrow s = s(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta, \boldsymbol{\mu}) \rightarrow 1 \text{ equació}$$

on $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_p\}$ són un conjunt de noves variables termodinàmiques (p noves incògnites) introduïdes per les equacions constitutives termomecàniques.

8) *Equacions termodinàmiques d'estat:*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equació calòrica} \\ \text{d'estat} \end{array} \rightarrow u = g(\rho, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}), \theta, \boldsymbol{\mu}) \right\} \rightarrow (1 + p) \text{ equacions} \quad (5.129)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equacions} \\ \text{cinètiques d'estat} \end{array} \rightarrow F_i(\rho, \theta, \boldsymbol{\mu}) = 0 \quad i \in \{1, 2, \dots, p\} \right\}$$

Ens trobem ara amb un conjunt de $(19 + p)$ equacions i $(19 + p)$ incògnites que, amb les condicions de contorn adequades, defineixen un problema matemàticament ben posat.

NOTA

És freqüent que en les equacions constitutives termomecàniques intervinguin les deformacions, $\boldsymbol{\varepsilon}$, que tanmateix no es comptabilitzen com a incògnites addicionals, atès que se suposen calculables en funció de les equacions del moviment que, al seu torn, es poden calcular per integració del camp de velocitats

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})$$

(vegeu els capítols 1 i 2).

Observació 5-17

Les equacions de continuïtat, de Cauchy, de simetria del tensor de tensions, de balanç d'energia, i les desigualtats del segon principi de la termodinàmica (equacions (5.122) a (5.126)) són vàlides i generals per a qualsevol medi continu, sigui quin sigui el material que el constitueixi i per a qualsevol rang de desplaçaments o de deformacions. Al contrari, les equacions constitutives (5.127) a (5.129) són específiques del material o del tipus del medi continu amb què es tracti (sòlid, fluid, gas) i els diferencien entre si.

5.13.1 Problema termomecànic desacoblat

Per a la resolució del problema general en mecànica de medis continus s'ha de resoldre un sistema d'equacions diferencials en derivades parcials que involucra les $(19 + p)$ equacions i les $(19 + p)$ incògnites discutides a l'apartat anterior. Tanmateix, en determinades circumstàncies o sota certes hipòtesis, és possible descompondre el problema general en dos problemes menors (involucrant cada un d'ells un nombre menor d'equacions i incògnites), denominats *problema mecànic* i *problema tèrmic*, que es poden resoldre de forma independent (desacoblada) entre si.

Com a exemple, considereu que la distribució de temperatures $\theta(\mathbf{x}, t)$ és coneguda *a priori*, o no intervé de forma rellevant en les equacions constitutives termomecàniques (5.128) i que, a més, les equacions constitutives esmentades no involucren noves variables termodinàmiques ($\boldsymbol{\mu} = \{\emptyset\}$). En aquest cas, considerem el conjunt d'equacions següent:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{Eq. de continuïtat : } \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 & (1 \text{ ec.}) \\ \text{Eq. de Cauchy : } \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} & (3 \text{ ec.}) \\ \text{Eq. constitutives} & \\ \text{mecàniques : } f_i(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = 0 \quad i \in \{1, \dots, 6\} & (6 \text{ ec.}) \end{array} \right\} \rightarrow 10 \text{ equacions} \quad (5.130)$$

que involucren les incògnites següents:

$$\left. \begin{array}{l} \rho(\mathbf{x}, t) \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 3 \text{ incògnites} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \rightarrow 6 \text{ incògnites} \end{array} \right\} 10 \text{ incògnites} \quad (5.131)$$

El problema definit per les equacions (5.130) i (5.131) constitueix el denominat *problema mecànic* que involucra les variables (5.131) (*denominades variables mecàniques*) que, d'altra banda, són les de vertader interès en molts problemes d'enginyeria.

El problema mecànic constitueix, en aquest cas, un sistema d'equacions diferencials *reduït* respecte al problema general i es pot resoldre *independentment* de la resta de les equacions d'aquest.

NOTA

Per simplicitat, s'ha suposat aquí la simetria del tensor de tensions (5.124) ja imposada, eliminant aquesta condició del conjunt d'equacions i reduint el nombre d'incògnites de $\boldsymbol{\sigma}$ de 9 a 6 components.

6 Elasticitat lineal

6.1 Hipòtesi de la teoria de l'elasticitat lineal

La teoria de l'elasticitat lineal es pot considerar una simplificació de teories més generals (teoria general de l'elasticitat), però prou aproximada per a la majoria de les aplicacions en enginyeria.

Les hipòtesis simplifícatives de la teoria de l'elasticitat lineal són essencialment les següents:

- a) Deformacions infinitesimals (els desplaçaments i els seus gradients són petits, vegeu el capítol 2)
- *Desplaçaments petits*: No es diferencien la configuració material (corresponent a l'instant de referència t_0) de l'espacial (corresponent a l'instant actual t) i, en conseqüència, tampoc es diferencien les coordenades espacials de les materials (vegeu la Figura 6.1).

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \underbrace{\mathbf{u}}_{\approx \mathbf{0}} \Rightarrow \mathbf{x} \approx \mathbf{X} \quad (6.1)$$

Observació 6-1

Com a conseqüència de l'equació (6.1), *no hi ha diferència entre les descripcions espacial i material* d'una propietat:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} \Rightarrow \gamma(\mathbf{x}, t) = \gamma(\mathbf{X}, t) = \Gamma(\mathbf{X}, t) = \Gamma(\mathbf{x}, t)$$

i qualsevol referència a descripcions espacials i materials (com també als conceptes associats, com derivada local, derivada material, etc.) perd el seu sentit en elasticitat infinitesimal.

Tampoc es distingeix entre els operadors diferencials *nabla espacial* (∇) i *nabla material* ($\bar{\nabla}$):

$$\frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial \mathbf{X}} \Rightarrow \nabla(\bullet) = \bar{\nabla}(\bullet)$$

A partir de l'equació (6.1), es pot escriure:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \approx \mathbf{1} \Rightarrow |\mathbf{F}| \approx 1 \quad (6.2)$$

Observació 6-2

Com a conseqüència de l'equació (6.2) i de l'equació de conservació de la massa, la densitat en la configuració actual $\rho_t \equiv \rho(\mathbf{X}, t)$ coincideix amb la de la configuració de referència $\rho_0 \equiv \rho(\mathbf{X}, 0)$ (que se suposa coneguda):

$$\rho_0 = \rho_t |\mathbf{F}| \approx \rho_t$$

i, en conseqüència, la densitat no és incògnita en problemes d'elasticitat lineal.

• Gradients dels desplaçaments petits

Com a conseqüència no hi ha distinció entre els tensors material $\mathbf{E}(\mathbf{X}, t)$ i espacial $\mathbf{e}(\mathbf{x}, t)$ de deformació que col·lapsen en el tensor de deformació infinitesimal $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{X}, t) &\approx \mathbf{e}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right. \quad (6.3) \end{aligned}$$

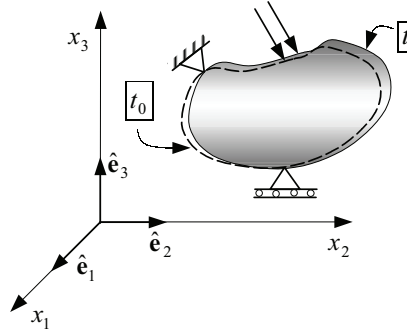


Figura 6.1

b) Existència d'un estat neutre

S'admet l'existència d'un estat neutre en el qual les deformacions i les tensions són nul·les. Normalment, s'entén que l'estat neutre es produeix en la configuració de referència:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (6.4)$$

NOTA

La restricció a processos *isotèrmics* desapareix en la teoria de la *termoelasticitat* lineal tractada a l'apartat 6.

c) Es considera (en principi) que el procés de deformació és isotèrmic i adiabàtic

Definicions

Processos isotèrmics: aquells que tenen lloc a temperatura $\theta(\mathbf{x}, t)$ constant al llarg del temps:

$$\Rightarrow \theta(\mathbf{x}, t) \equiv \theta(\mathbf{x})$$

Processos adiabàtics: aquells que es produeixen sense generació de calor en tot punt i instant de temps:

$$\text{Calor generada en un domini } V: \int_V \rho r dV - \int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \forall V$$

$$\Rightarrow \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t$$

Els processos de deformació *lents* solen considerar-se adiabàtics.

6.2 Equació constitutiva elàstica lineal. Llei de Hooke generalitzada

La llei de Hooke per a problemes unidimensionals suposa la *proporcionalitat* entre la tensió, σ , i la deformació, ε , a través de la constant de proporcionalitat denominada mòdul d'elasticitat E :

$$\sigma = E \varepsilon \quad (6.5)$$

En la teoria de l'elasticitat aquesta proporcionalitat es generalitza al cas multidimensional suposant la *linealitat* de la relació entre els components del tensor de tensions $\boldsymbol{\sigma}$ i de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}$ en el que s'anomena *lleï de Hooke generalitzada*:

$$\begin{array}{l} \text{Llei de Hooke} \\ \text{generalitzada} \end{array} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad (6.6)$$

que constitueix l'equació constitutiva per a un material elàstic lineal.

El tensor de quart ordre \mathbb{C} (denominat *tensor de constants elàstiques*) té en principi $3^4 = 81$ components. Tanmateix, a causa de la simetria de $\boldsymbol{\sigma}$ i $\boldsymbol{\varepsilon}$, ha de presentar certes simetries davant l'intercanvi d'índexs. Aquestes són:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jikl} \\ \mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{ijlk} \end{array} \right\} \rightarrow \text{Simetries majors} \quad (6.7)$$

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij} \rightarrow \text{Simetries menors}$$

i, com a conseqüència, el nombre de constants diferents en el tensor de constants elàstiques \mathbb{C} es redueix llavors a 21.

Observació 6-3

Una característica essencial del comportament elàstic (que es comprova en l'equació (6.5)) és la dependència de les tensions, en un cert punt i instant $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$, (únicament) de les deformacions en el punt i instant $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ esmentat i no de la història de deformacions prèvia.

6.2.1 Potencial elàstic

Considerem l'energia interna específica $u(\mathbf{x}, t)$ (energia interna/unitat de massa) i la densitat d'energia interna $\hat{u}(\mathbf{x}, t)$ (energia interna/unitat de volum) relacionades per:

$$\hat{u}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 u(\mathbf{x}, t)$$

$$\rho \frac{du}{dt} \approx \rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{d(\rho_0 u)}{dt} = \frac{d\hat{u}}{dt} \quad (6.8)$$

on s'ha tingut en compte que $\rho_0 \approx \rho$ (vegeu l'Observació 6-2). Considerem ara l'equació de l'energia (forma local):

$$\rho_0 \frac{du}{dt} = \frac{d\hat{u}}{dt} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}}_{\boldsymbol{\varepsilon}} + \underbrace{\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q}}_{=0} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\hat{u}}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.9)$$

on s'ha considerat la naturalesa adiabàtica del procés de deformació ($\rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$).

La forma global (integral) de l'equació de l'energia (6.9) s'obté integrant sobre el volum material V :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Forma global} \\ \text{de l'equació de} \\ \text{l'energia en} \\ \text{elasticitat lineal} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d}{dt} \underbrace{\int_{V_t=V} \hat{u} dV}_{\mathcal{U}} = \int_V \frac{d\hat{u}}{dt} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \\ \mathcal{U}(t) = \int_V \hat{u}(\mathbf{x}, t) dV \end{array} \right. \quad (6.10)$$

on $\mathcal{U}(t)$ és l'energia interna del volum material considerat.

Observació 6-4

La potència tensional (per al cas d'elasticitat lineal) és una diferencial exacta:

$$\text{Potencial tensional} = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \frac{d\mathcal{U}}{dt}$$

Substituint ara l'equació (6.6) en la (6.9):

$$\begin{aligned}
 \frac{d\hat{u}^{not}}{dt} &= \dot{\hat{u}} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \dot{\varepsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}) = \\
 &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \dot{\varepsilon}_{kl} \mathbb{C}_{kl ij} \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}) = \\
 &= \frac{1}{2} (\dot{\varepsilon}_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon})
 \end{aligned} \tag{6.11}$$

on s'han considerat les simetries de l'equació (6.7). Integrant l'equació (6.11) i imposant la condició que la densitat d'energia interna $\hat{u}(\mathbf{x}, t_0)$ a l'estat neutre (per a $t = t_0 \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{0}$) sigui nul·la:

NOTA

La condició $\hat{u}(\mathbf{x}, t_0) = 0$ es pot introduir sense pèrdua de generalitat.

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned} \hat{u}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) + a(\mathbf{x}) \\ \hat{u}(\mathbf{x}, t_0) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0) : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t_0)}_{=0} + a(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Densitat d'energia interna $\rightarrow \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl}$

(6.13)

Derivant l'equació (6.13) respecte a $\boldsymbol{\varepsilon}$ i tenint de nou en compte les simetries:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C}}_{\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{2} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2} \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \mathbb{C}_{kl ij} = \frac{1}{2} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij} \end{cases} \tag{6.14}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma} \\ \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \tag{6.15}$$

L'equació (6.15) qualifica la densitat d'energia interna $\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})$ com un potencial per a les tensions (que s'obtenen per derivació d'aquest) denominat *potencial elàstic*.

Potencial elàstic $\rightarrow \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \underbrace{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{\sigma}$$

(6.16)

6.3 Isotropia. Constants de Lamé. Llei de Hooke per a elasticitat lineal isòtropa

Definició

Material isòtrop: Aquell que té les mateixes propietats en totes les direccions.

NOTA

Un tensor és isòtrop si manté els seus components en qualsevol sistema de coordenades cartesianes. L'expressió més general d'un *tensor isòtrop de quart ordre* és:

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$$

$$\forall \lambda \quad i \quad \mu$$

RECORDATORI

El tensor simètric unitari de quart ordre \mathbf{I} (isòtrop) es defineix mitjançant els seus components:

$$[\mathbf{I}]_{ijkl} = \frac{1}{2} [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}]$$

Per al cas d'un material elàstic lineal, les *propietats elàstiques* estan contingudes al tensor \mathbb{C} de propietats elàstiques de les equacions (6.6) o (6.7). En conseqüència, els components del tensor esmentat han de ser independents de l'orientació del sistema cartesià en el qual es treballa. Si considerem, per exemple, els sistemes $\{x_1, x_2, x_3\}$ i $\{x'_1, x'_2, x'_3\}$ de la Figura 6.2, l'equació constitutiva per als dos sistemes s'escriu:

$$\begin{aligned} \{x_1, x_2, x_3\} &\Rightarrow [\sigma] = [\mathbb{C}] : [\varepsilon] \\ \{x'_1, x'_2, x'_3\} &\Rightarrow [\sigma'] = [\mathbb{C}'] : [\varepsilon'] \end{aligned} \quad (6.17)$$

i, per al cas de material isòtop, els components de \mathbb{C} en tots dos sistemes han de ser els mateixos ($\Rightarrow [\mathbb{C}] = [\mathbb{C}']$). En conseqüència, l'anterior definició, de caràcter físic, d'isotropia es tradueix en el *caràcter isòtrop*, en el sentit matemàtic, del tensor de constants elàstiques \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} \text{Tensor de} & \left\{ \begin{aligned} \mathbb{C} &= \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \\ \text{constants} &\rightarrow \\ \text{elàstiques} &\left\{ \begin{aligned} \mathbb{C}_{ijkl} &= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \quad (6.18)$$

On λ, μ són conegudes com les *constants de Lamé*, que caracteritzen el comportament elàstic del material i que s'han d'obtenir experimentalment.

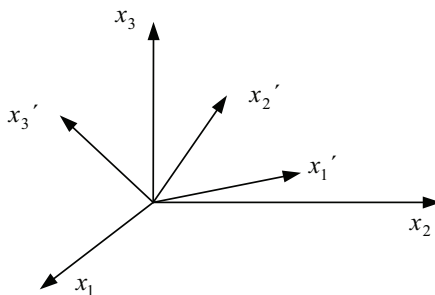


Figura 6.2

Observació 6-5

La condició d'isotropia redueix el nombre de constants elàstiques del material de 21 a 2.

Substituint l'equació (6.18) en la (6.6) s'obté l'*equació constitutiva elàstica lineal isòtropa*:

$$\sigma_{ij} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \lambda \underbrace{\delta_{ij} \delta_{kl} \varepsilon_{kl}}_{\varepsilon_{ll}} + 2\mu \underbrace{\left(\frac{1}{2} \delta_{ik} \delta_{jl} \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{il} \delta_{jk} \varepsilon_{kl} \right)}_{\varepsilon_{ij}} \quad (6.19)$$

Equació constitutiva per a material elàstic lineal isòtrop. Llei de Hooke.	\rightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right.$	(6.20)
--	---------------	--	--------

6.3.1 Inversió de la llei de Hooke. Mòdul de Young. Coeficient de Poisson

L'equació constitutiva (6.20) proporciona les tensions en funció de les deformacions. Per obtenir la seva inversa es procedeix de la manera següent:

a) S'obté la traça de l'equació (6.20):

$$\left. \begin{aligned} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) &= \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \underbrace{\text{Tr}(\mathbf{1})}_3 + 2\mu \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = (3\lambda + 2\mu) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \\ (i=j) \Rightarrow \sigma_{ii} &= \lambda \varepsilon_{ll} \underbrace{\delta_{ii}}_3 + 2\mu \varepsilon_{ii} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{ii} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{(3\lambda + 2\mu)} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \quad (6.21)$$

b) aïllant $\boldsymbol{\varepsilon}$ de l'equació (6.20) i substituint la (6.21):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{1}{2\mu} \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma} \quad (6.22)$$

Definint ara unes noves propietats elàstiques E (mòdul de Young) i ν (coeficient de Poisson):

Mòdul de Young : (Mòdul de deformació longitudinal)	$\left. \begin{array}{l} \rightarrow E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \rightarrow \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{array} \right\} \Rightarrow$	(6.23)
Coeficient de Poisson :		

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \\ \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G \rightarrow \text{(Mòdul de deformació transversal)} \end{array} \right.$$

L'equació (6.22) es pot reescriure en funció de E i de ν donant lloc a la llei de Hooke inversa:

Equació constitutiva inversa per a material elàstic lineal isòtrop	\rightarrow	$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1 + \nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \\ \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right.$	(6.24)
--	---------------	--	--------

Finalment, les equacions (6.24) es poden reescriure utilitzant la notació enginyeril per als components dels tensors de tensió de deformació com:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (6.25)$$

Exemple 6.1 Per a la peça de la figura, constituïda per un material elàstic lineal isòtrop, amb mòdul de Young E i mòdul de deformació transversal G , s'admet l'estat tensional uniforme següent:

$$\sigma_x \neq 0 \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

Obteniu les deformacions enginyerils.

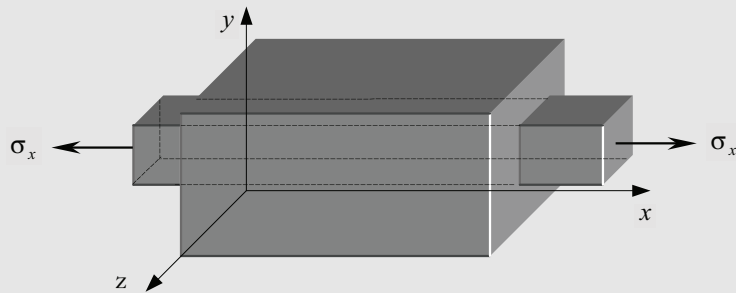


Figura 6.3

Resolució

De les equacions de (6.25) es pot obtenir:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \Rightarrow \begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E} \sigma_x \\ \epsilon_y = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_z = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \end{cases} \quad \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy} = 0 \\ \gamma_{xz} = \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0 \end{cases}$$

Com a conseqüència de les deformacions esmentades la peça s'estira en la direcció x i es contreu en les direccions y, z (vegeu la Figura 6.3).

6.4 Llei de Hooke en components esfèrics i desviadors

Considerem la descomposició dels tensors de tensions σ i de deformacions ϵ en la seva part esfèrica i desviadora:

$$\sigma = \underbrace{\frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma)}_{\sigma_m} \mathbf{1} + \sigma' = \sigma_m \mathbf{1} + \sigma' \quad (6.26)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} \underbrace{Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}}_e + \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{3} e \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (6.27)$$

La deformació volumètrica $e = Tr(\boldsymbol{\varepsilon})$ s'obté a partir de la traça de l'equació (6.24):

$$e = Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) = -\frac{\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma}) \underbrace{Tr(\mathbf{1})}_3 + \frac{1+\nu}{E} Tr(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1-2\nu}{E} \underbrace{Tr(\boldsymbol{\sigma})}_{3\sigma_m} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \sigma_m \quad (6.28)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_m = \frac{E}{3(1-2\nu)} e = K e \\ K \stackrel{def}{=} \lambda + \frac{2}{3} \mu = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \text{Mòdul de deformació volumètrica} \end{cases} \quad (6.29)$$

Substituint les equacions (6.26), (6.27) i (6.29) en la (6.24):

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= -\frac{\nu}{E} 3\sigma_m \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} [\sigma_m \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}'] = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} \underbrace{\sigma_m}_{\frac{E}{3(1-2\nu)} e} \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{3} e \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}' \Rightarrow \end{aligned} \right\} \quad (6.30)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3} e \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{3} e \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}' \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}' = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}}_{\frac{1}{2\mu}} \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2\mu} \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma}'$$

Les equacions (6.29) i (6.30) relacionen la part esfèrica (caracteritzada per la tensió mitjana σ_m i la deformació volumètrica e) i la part desviadora ($\boldsymbol{\sigma}'$ i $\boldsymbol{\varepsilon}'$) dels tensors de tensió i de deformació:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_m &= K e && \rightarrow \text{Part esfèrica} \\ \boldsymbol{\sigma}' &= 2G \boldsymbol{\varepsilon}' \\ \sigma'_{ij} &= 2G \varepsilon'_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Part desviadora} \quad (6.31)$$

Observació 6-6

Noteu la proporcionalitat tant entre σ_m i e com entre els components (un a un) σ'_{ij} i ε'_{ij} (vegeu la Figura 6.4).

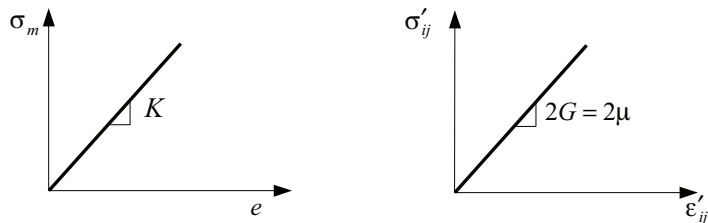


Figura 6.4 – Llei de Hooke en components esfèrics i desviadors

6.5 Limitacions en els valors de les propietats elàstiques

Per consideracions termodinàmiques es pot demostrar que el tensor de propietats elàstiques \mathbf{C} és definit positiu i, per tant,

$$\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} > 0; \quad \forall \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0} \quad (6.32)$$

RECORDATORI

Es diu que un tensor simètric de quart ordre

\mathbf{A} és *definit positiu* si per a tot tensor de segon ordre $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ es compleix

$$\mathbf{x} : \mathbf{A} : \mathbf{x} = x_{ij} A_{ijkl} x_{kl} > 0$$

i, a més,

$$\mathbf{x} : \mathbf{A} : \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Observació 6-7

Com a conseqüència de l'equació (6.32), el potencial elàstic és sempre nul o positiu

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \geq 0$$

Observació 6-8

El potencial elàstic *presenta un mínim a l'estat neutre* (per a $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$) (vegeu la Figura 6.5). En efecte, de l'equació (6.15):

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad \frac{\partial^2 \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{C}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial^2 \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \partial \boldsymbol{\varepsilon}} \Big|_{\boldsymbol{\varepsilon}=\mathbf{0}} = \mathbf{C} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) \text{ té un extrem} \\ \text{(màxim-mínim) a } \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \text{L'extrem és} \\ \text{un mínim} \end{array}$$

definit positiu

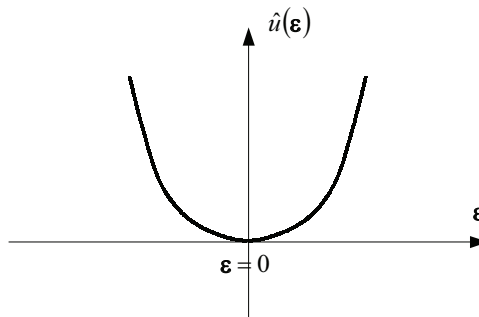


Figura 6.5 – Potencial elàstic

Considerem l'expressió del potencial elàstic (6.16) i l'equació constitutiva (6.20):

$$\begin{aligned}\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}] : \boldsymbol{\varepsilon} = \\ &= \frac{1}{2} \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \underbrace{\mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})} + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \lambda \text{Tr}^2(\boldsymbol{\varepsilon}) + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon}\end{aligned}\quad (6.33)$$

L'expressió (6.33) es pot posar també en funció dels components esfèrics i desviadors de la deformació:

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \lambda (\underbrace{\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon})}_e)^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \lambda e^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.34)$$

NOTA

La traça d'un tensor desviador és sempre nul·la $\Rightarrow \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}') = 0$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} &= \left(\frac{1}{3} e \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' \right) : \left(\frac{1}{3} e \mathbf{1} + \boldsymbol{\varepsilon}' \right) = \frac{1}{9} e^2 \underbrace{\mathbf{1} : \mathbf{1}}_3 + \frac{2}{3} e \underbrace{\mathbf{1} : \boldsymbol{\varepsilon}'}_{\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}')=0} + \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' = \\ &= \frac{1}{3} e^2 + \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}'\end{aligned}\quad (6.35)$$

i substituint l'equació (6.35) en la (6.34):

$$\Rightarrow \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \lambda e^2 + \frac{1}{3} \mu e^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right)}_K e^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' \quad (6.36)$$

$$\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} K e^2 + \mu \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' \geq 0 \quad (6.37)$$

Considerem ara un cert material elàstic lineal isòtrop, caracteritzat per un cert valor de les seves propietats elàstiques. L'equació (6.37) s'ha de complir per a qualsevol procés de deformació. Considerem dos tipus particulars:

1) *Un procés de deformació purament esfèric*

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} &= \frac{1}{3} e \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\varepsilon}'^{(1)} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{u}^{(1)} = \frac{1}{2} K e^2 \geq 0 \Rightarrow K > 0 \quad (6.38)$$

2) *Un procés de deformació purament desviador*

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} &= \boldsymbol{\varepsilon}' \\ e^{(2)} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \hat{u}^{(2)} = \mu \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' \geq 0 \Rightarrow \mu > 0 \quad (6.39)$$

Les equacions (6.38) i (6.39) condueixen a les següents limitacions en els valors de les constants elàstiques:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \quad ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \quad (6.40)$$

L'experiència demostra que el coeficient de Poisson ν és sempre no negatiu i en conseqüència:

NOTA

El producte doblement contret d'un tensor per ell mateix és sempre superior o igual a zero

$$\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}' : \boldsymbol{\varepsilon}' = \underbrace{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \\ \nu \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow E > 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0 \\ E \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$$
(6.41)

6.6 Plantejament del problema elàstic lineal

Considerem el sòlid elàstic lineal de la Figura 6.6 sotmès a unes accions caracteritzades pel vector de forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ a l'interior del volum V i el vector de tracció $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t)$ en el contorn ∂V . Denominem *problema elàstic lineal* el conjunt d'equacions que permeten obtenir l'evolució al llarg del temps dels desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ i tensions $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ corresponents.

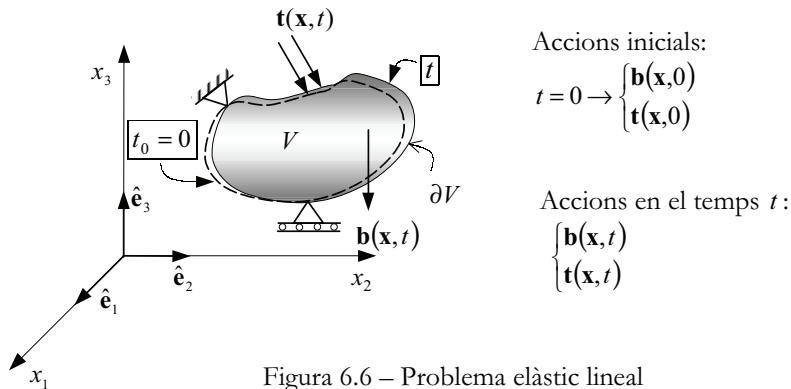


Figura 6.6 – Problema elàstic lineal

6.6.1 Equacions de govern

El problema elàstic lineal ve governat per les *equacions* següents:

1) *Equació de Cauchy* (balanç de la quantitat de moviment)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho_0 b_j = \rho_0 \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} \quad j \in \{1, 2, 3\}$$

(3 equacions) (6.42)

2) *Equació constitutiva* (elàstica lineal isòtropa)

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{ll} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

(6 equacions) (6.43)

NOTA

Es denomina aquí *sòlid elàstic lineal* un medi continu constituït per un material que obeeix a l'equació constitutiva elàstica lineal.

NOTA

La simetria dels tensors de tensió i de deformació comporta que de les nou equacions només sis siguin diferents entre si. Així mateix, en comptabilitzar incògnites només es consideren els components *diferents* dels tensors esmentats.

3) *Equació geomètrica* (relació de compatibilitat entre deformacions infinitesimals i desplaçaments)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \\ \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}\end{aligned} \quad (6 \text{ equacions}) \quad (6.44)$$

Les equacions esmentades involucren a les incògnites següents:

- $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (3 incògnites)
 - $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ (6 incògnites)
 - $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ (6 incògnites)
- (6.45)

Les equacions (6.42) a (6.44) constitueixen un sistema d'equacions diferencials en derivades parcials (EDP). El sistema està constituït per 15 equacions diferencials amb les 15 incògnites (6.45) (del tipus $(\bullet)(x, y, z, t)$) que, per tant, s'ha de resoldre a l'espai $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. El problema queda ben determinat quan se'l proveeix de les condicions de contorn adequades.

6.6.2 Condicions de contorn

6.6.2.1 Condicions de contorn a l'espai

Considerarem el contorn $\Gamma \equiv \partial V$ del sòlid dividit en tres parts Γ_u , Γ_σ i $\Gamma_{u\sigma}$ amb les característiques següents (vegeu la Figura 6.7)

$$\begin{aligned}\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma \cup \Gamma_{u\sigma} &= \Gamma \equiv \partial V \\ \Gamma_u \cap \Gamma_\sigma &= \Gamma_u \cap \Gamma_{u\sigma} = \Gamma_{u\sigma} \cap \Gamma_\sigma = \{\emptyset\}\end{aligned} \quad (6.46)$$

i en funció d'això definirem les *condicions de contorn a l'espai*, és a dir, aquelles que afecten els arguments espacials (x, y, z) de les incògnites (6.45) del problema:

- Contorn Γ_u : *condicions de contorn en desplaçaments*

$$\left. \begin{aligned}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ u_i(\mathbf{x}, t) &= u_i^*(\mathbf{x}, t) \quad i \in \{1, 2, 3\}\end{aligned} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad \forall t \quad (6.47)$$

- Contorn Γ_σ : *condicions de contorn en tensions*

$$\left. \begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) \cdot n_j &= t_j^*(\mathbf{x}, t) \quad i, j \in \{1, 2, 3\}\end{aligned} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \quad \forall t \quad (6.48)$$

- Contorn $\Gamma_{u\sigma}$: *condicions de contorn mixtes (desplaçament-tensió)*

$$\left. \begin{aligned}u_i(\mathbf{x}, t) &= u_i^*(\mathbf{x}, t) \\ \sigma_{jk}(\mathbf{x}, t) \cdot n_k &= t_j^*(\mathbf{x}, t)\end{aligned} \right| \quad (i, j, k \in \{1, 2, 3\} \quad i \neq j) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{u\sigma} \quad \forall t \quad (6.49)$$

NOTA

A $\Gamma_{u\sigma}$ certs components (components i) tenen prescrit el desplaçament i els restants (components j) tenen prescrit el vector tracció.

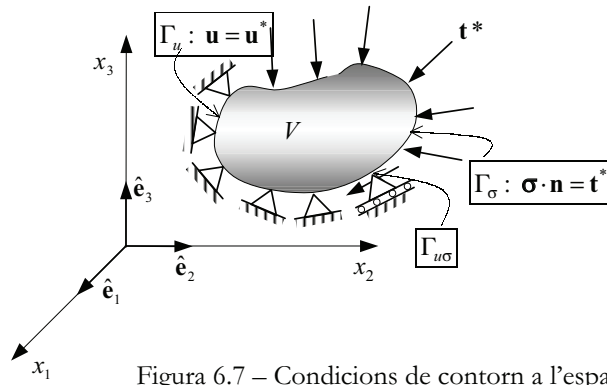


Figura 6.7 – Condicions de contorn a l'espai

Exemple 6.2 A la biga de la Figura 6-8 s'exemplifiquen els diversos tipus de condicions de contorn a l'espai.

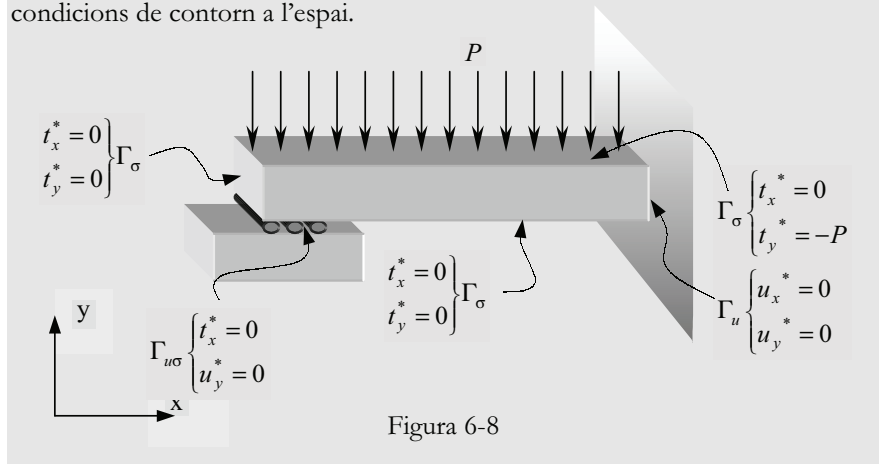


Figura 6-8

6.6.2.2 Condicions de contorn en el temps: condicions inicials

En general, en l'instant inicial o de referència, $t=0$, seran coneguts els desplaçaments i la velocitat:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad (6.50)$$

6.6.3 Problema quasiestàtic

El sistema d'equacions (6.42) a (6.50) es pot visualitzar, des d'un punt de vista mecànic, com un sistema d'accions o dades (les forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, el vector de tracció $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$, els desplaçaments imposats $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ i les velocitats inicials $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$) que, inserides en un *model* matemàtic constituït per les equacions diferencials de la secció 6.6.1 i les condicions de contorn de l'apartat 6.6.2, proporciona la *resposta* o solució en forma dels camps de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$ i de tensions $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{c} \text{MODEL} \\ \text{MATEMÀTIC :} \\ \text{EDP + c.c.} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\} \quad (6.51)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{not}} \text{ Accions} = \mathbf{A}(\mathbf{x}, t); \quad \text{Respostes} = \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{not}}$

NOTA

En aquest cas (problema general), el problema s'anomena *problema dinàmic*.

En el cas més general, tant les accions com les respostes dependran del temps (vegeu la Figura 6.9) i el sistema d'EDP s'haurà d'integrar tant a les variables espacials com al temps ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$). Tanmateix, en certs casos, l'espai d'integració es pot reduir en la dimensió corresponent al temps. Aquest és el cas dels denominats problemes quasiestàtics.

Definició

Problema elàstic lineal quasiestàtic: Problema elàstic lineal en el qual l'acceleració es considera negligible ($\mathbf{a} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \approx \mathbf{0}$). Aquesta hipòtesi és acceptable sempre que *les accions s'apliquin molt lentament*. En aquest cas, es pot suposar que la variació de les accions \mathbf{A} amb el temps és lenta ($\partial^2 \mathbf{A} / \partial t^2 \approx \mathbf{0}$) i, a causa de la dependència contínua dels resultats respecte a les dades, la variació amb el temps de la resposta també és petita ($\partial^2 \mathbf{R} / \partial t^2 \approx \mathbf{0}$). En conseqüència, la segona derivada temporal de la resposta es considera negligible i, en particular, $\frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \approx \mathbf{0}$.

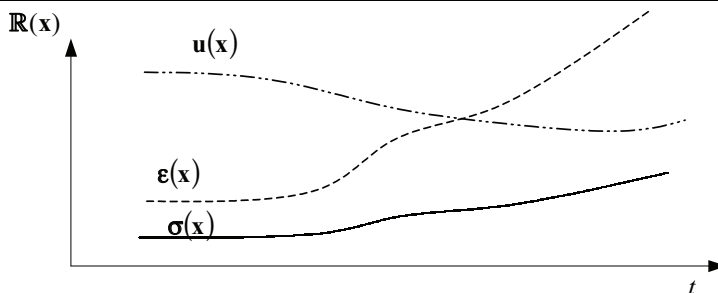


Figura 6.9 – Evolució de la resposta amb el temps

Per al problema quasiestàtic les equacions diferencials de govern queden com segueix:

- *Equació de Cauchy*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \rho_0 \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \left(\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \right) = \mathbf{0} \quad (6.52)$$

equació que es coneix també com a *equació d'equilibri*.

- *Equació constitutiva*

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (6.53)$$

- Equació geomètrica

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \quad (6.54)$$

que ja no involucren cap derivada temporal. El sistema d'equacions diferencials només necessita ser integrat a l'espai (resolt en \mathbb{R}^3) amb les condicions de contorn a l'espai de l'apartat 6.6.2.1. D'altra banda, *el temps només juga un paper de paràmetre descriptiu de l'evolució de les accions* que se solen descriure en funció del denominat *factor de càrrega o pseudotemps* $\lambda(t)$:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, \lambda) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, \lambda) \end{Bmatrix}}_{\text{not}} \Rightarrow \left\langle \begin{array}{c} \text{MODEL} \\ \text{MATEMÀTIC:} \\ \text{EDP + c.c.} \end{array} \right\rangle \Rightarrow \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, \lambda) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, \lambda) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \lambda) \end{Bmatrix}}_{\text{not}} \quad (6.55)$$

Accions = $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \lambda)$, Resposta = $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda)$

En altres paraules, per a cada valor de les accions (caracteritzat per un valor fix de λ^*) $\mathbf{A}(\mathbf{x}, \lambda^*)$ s'obté una resposta $\mathbf{R}(\mathbf{x}, \lambda^*)$. Variant el valor de λ^* s'obté una família d'accions i la família de respostes corresponent.

Exemple 6.3 Aplicació a un problema típic de resistència de materials.

Considerem la mènscula de la Figura 6.10 amb una força $F(t)$ aplicada a l'extrem. Sota la hipòtesi de problema quasiestàtic, i davant d'una acció parametritzada del tipus λF^* , es pot conèixer la resposta (fletxa a l'extrem)

$$\delta(\lambda) = \lambda \frac{F^* l^3}{3EI} \quad (\text{solució de la resistència de materials}).$$

Si $\lambda(t)$ té una evolució qualsevol amb el temps, *el valor de $\delta(t) = \delta(\lambda(t))$ per a cada instant de temps només depèn del valor de λ corresponent.*

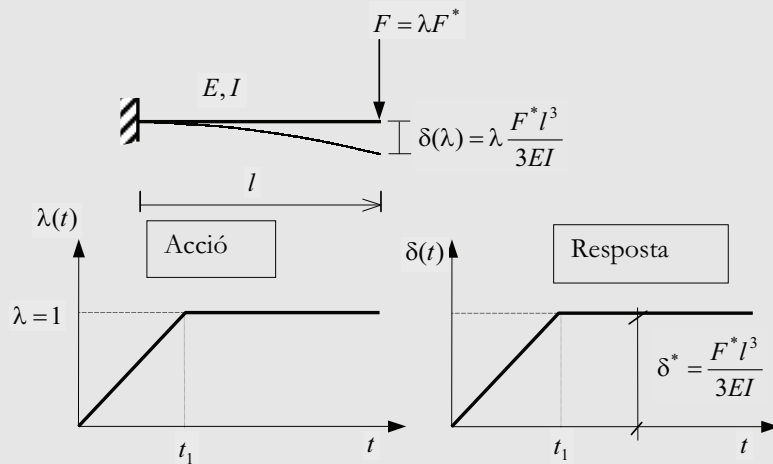


Figura 6.10

6.7 Resolució del problema elàstic lineal

La resolució del problema elàstic lineal es pot fer típicament amb dos plantejaments diferents:

- a) plantejament en *desplaçaments*
- b) plantejament en *tensions*.

Els seus noms respectius provenen de quina és la incògnita primal que es considera per al problema (desplaçaments o tensions, respectivament).

Observació 6-9

Actualment el plantejament en desplaçaments té més aplicació ja que s'hi basen la majoria dels mètodes de resolució *numèrica* del problema elàstic lineal.

6.7.1 Plantejament en desplaçaments: equacions de Navier

Considerem les equacions del problema elàstic lineal:

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} && \text{(Equació de Cauchy)} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} && \text{(Equació constitutiva)} \\ \boldsymbol{\epsilon} &= \nabla^s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) && \text{(Equació geomètrica)} \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_u : \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \quad \text{Condicions de contorn a l'espai} \quad (6.57)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) &= \mathbf{v}_0 \end{aligned} \right\} \quad \text{Condicions inicials} \quad (6.58)$$

L'objectiu és plantejar un sistema reduït, on intervinguin com a incògnita només el camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. El primer pas consisteix a substituir en (6.56) l'equació constitutiva en l'equació de Cauchy:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} &= \nabla \cdot [\lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}] + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \\ \lambda \nabla \cdot [\text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1}] + 2\mu \nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} + \rho_0 \mathbf{b} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.59)$$

L'equació (6.59) es pot reelaborar tenint en compte les identitats següents:

NOTA

Es defineix l'operador
laplaciana d'un vector
 \mathbf{v} com:

$$[\nabla^2 \mathbf{v}]_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\left. \begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon})_i &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}}_{(\nabla^2 \mathbf{u})_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{u}} = \frac{1}{2} (\nabla^2 \mathbf{u})_i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \cdot \mathbf{u})}_{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}))_i} = \Rightarrow \\ &= \left[\frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\left. \begin{aligned} [\nabla \cdot (Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1})]_i &= \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon_{ll} \delta_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ij} \right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right)}_{\nabla \cdot \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{(\nabla \cdot \mathbf{u})}_{(\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}))_i} = [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})]_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (6.61)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \cdot (Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

i substituint les equacions (6.60) i (6.61) en la (6.59):

$$\lambda \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Rightarrow \quad (6.62)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{Equacions} &\left\{ \begin{aligned} (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \rho_0 \mathbf{b} &= \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ (\lambda + \mu) u_{jji} + \mu u_{ijj} + \rho_0 b_i &= \rho_0 \ddot{u}_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right. \\ \text{de Navier} & \end{aligned}} \quad (6.63)$$

que constitueix un sistema d'EDP de segon ordre als desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ (que s'ha d'integrar, per tant, a $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+$), rebent el nom d'*equacions de Navier*.

Les condicions de contorn es poden escriure també en funció dels desplaçaments com segueix. Substituint l'equació constitutiva (6.56) en la condició de contorn en Γ_σ de (6.57):

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^* &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = [\lambda Tr(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}] \cdot \mathbf{n} = \lambda \underbrace{(Tr(\boldsymbol{\varepsilon})) \mathbf{n}}_{\nabla \cdot \mathbf{u}} + 2\mu \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{n}}_{\nabla^S \cdot \mathbf{u}} = \\ &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + 2\mu \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \\ &= \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + \mu (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (6.64)$$

i les condicions de contorn a l'espai (6.57), escrites ara en funció dels desplaçaments, queden:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ u_i = u_i^* \quad i \in \{1,2,3\} \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_u \quad (6.65)$$

$$\left. \begin{array}{l} \lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{n} + \mu(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \\ \lambda u_{i,l} n_l + \mu(u_{i,j} n_j + u_{j,i} n_j) = t_i^* \quad i, j \in \{1,2,3\} \end{array} \right\} \text{ en } \Gamma_\sigma$$

Les condicions inicials (6.58) romanen inalterades. Una vegada integrat el sistema (6.63) es disposa del camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Per derivació d'aquest i substitució en les equacions geomètriques en (6.56), s'obté el camp de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$, i substituïnt finalment en l'equació constitutiva, s'obté el camp de tensions $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$.

6.7.2 Plantejament en tensions: equacions de Beltrami-Michell

El mètode és només plantejable per al cas quasiestàtic de l'apartat 6.6.3. Considerem llavors les equacions del problema elàstic lineal quasiestàtic:

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(Equació d'equilibri)} \\ \text{(Equació constitutiva inversa)} \\ \text{(Equació geomètrica)} \end{array} \quad (6.66)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{array} \right\} \text{ Condicions de contorn a l'espai} \quad (6.67)$$

on en (6.66) s'ha considerat l'equació constitutiva inversa (6.24) (deformacions en funció de les tensions).

El punt de partida del plantejament en tensions són les equacions geomètriques en (6.66) de les quals, per derivacions successives, s'eliminen els desplaçaments i s'obtenen les *equacions de compatibilitat*:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad i, j, k, l \in \{1,2,3\} \quad (6.68)$$

La deducció de les equacions del problema es fa en els passos següents:

- Se substitueix l'equació constitutiva de (6.66) en les equacions de compatibilitat (6.68).
- Se substitueix en l'equació resultant l'equació d'equilibri de (6.66).

El resultat és el conjunt d'equacions següent:

NOTA

La deducció de les equacions de compatibilitat s'ha estudiat al capítol 3, apartat 3.3.

Equacions de Beltrami - Michell
$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{ii,jj} = - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} (\rho_0 b_l)_{,l} - (\rho_0 b_i)_{,j} - (\rho_0 b_j)_{,i} \quad i, j \in \{1,2,3\} \quad (6.69)$

Les equacions (6.69) reben el nom d'*equacions de Beltrami-Michell* i constitueixen un sistema d'EDP de segon ordre en les incògnites $\sigma(\mathbf{x})$ que s'han de resoldre en \mathbb{R}^3 .

Com a *condicions de contorn* del sistema esmentat es tenen les pròpies equacions d'equilibri en (6.66) que, en tractar-se d'un sistema d'EDP de primer ordre, actuen com a condicions de contorn del sistema de segon ordre (6.69), i les condicions de contorn a Γ_σ :

$\nabla \cdot \sigma + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}$	(Equació d'equilibri)	(6.70)
--	-----------------------	--------

$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \text{ en } \Gamma_\sigma$	(Condicions de contorn en Γ_σ)	(6.71)
--	---	--------

Una vegada integrat el sistema (6.69) es disposa del camp de tensions $\sigma(\mathbf{x})$. A partir d'aquest, mitjançant substitució en l'equació constitutiva inversa en (6.66), s'obtenen les deformacions $\epsilon(\mathbf{x})$. Tanmateix, per obtenir el camp de desplaçaments $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ és necessari integrar les equacions geomètriques amb les condicions de contorn a Γ_u :

$$\begin{cases} \epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}(\mathbf{x}) \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x})) & \mathbf{x} \in V \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \end{cases} \quad (6.72)$$

Es tracta, per tant, d'un segon sistema d'EDP de primer ordre que s'ha d'integrar a \mathbb{R}^3 .

NOTA

Al capítol 3, apartat 3.4.2, es va proporcionar un procediment analític per integrar les equacions geomètriques esmentades.

Observació 6-10

La necessitat d'*integrar* el segon sistema (6.72) (quan es planteja el problema en tensions) constitueix un desavantatge (davant el plantejament en desplaçaments de l'apartat 6.7.1) quan s'utilitzen mètodes numèrics per resoldre el problema elàstic lineal.

6.8 Unicitat de la solució del problema elàstic lineal

Teorema

La solució $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \epsilon(\mathbf{x}, t) \\ \sigma(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$ del problema elàstic lineal (6.42) a (6.44) és única.

Demostració:

Considerem el problema elàstic lineal esquematitzat a la Figura 6.11 subjecte a les accions definides per $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \left[\mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t), \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \right]^T$, en els dominis V , Γ_u , Γ_σ i V , respectivament (complint-se que $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \partial V$ i $\Gamma_\sigma \cap \Gamma_u = \emptyset$).

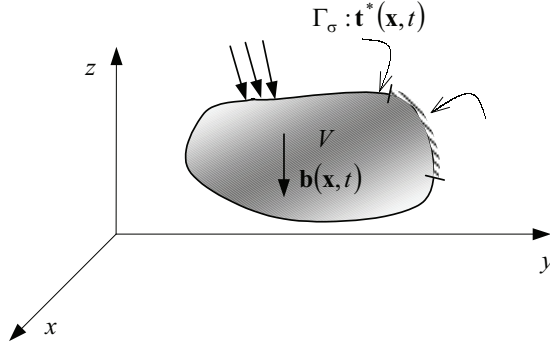


Figura 6.11 – Problema elàstic lineal

Les possibles solucions $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)]^T$ del problema elàstic lineal han de verificar les equacions:

<i>Equació de Cauchy:</i>	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$	(6.73)
<i>Equació constitutiva:</i>	$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$	
<i>Equació geomètrica:</i>	$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})$	
<i>Condicions de contorn a l'espai:</i>	$\begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \end{cases}$	(6.74)
<i>Condicions inicials:</i>	$\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0 \end{cases}$	(6.75)

La demostració de la unicitat de la solució es fa tal com segueix. Suposarem que la solució no és única, és a dir, que existeixen dues solucions diferents al problema:

$$\mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} \quad (6.76)$$

$$\mathbf{R}^{(1)} \neq \mathbf{R}^{(2)}$$

que, per tant, compleixen les equacions (6.73) a (6.75) i són respostes elàstiques a l'acció $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \left[\mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t), \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t), \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \right]^T$. Considerem ara la possible resposta constituïda per la diferència $\mathbf{R}^{(2)} - \mathbf{R}^{(1)}$:

$$\tilde{\mathbf{R}} \stackrel{def}{=} \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\} \stackrel{def}{=} \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) \end{array} \right\} \quad (6.77)$$

Observem que la resposta $\tilde{\mathbf{R}}$ compleix les equacions següents:

- Equació de Cauchy amb $\mathbf{b} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t)) = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)}}_{-\rho_0 \mathbf{b} + \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t^2}} - \underbrace{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)}}_{-\rho_0 \mathbf{b} + \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t^2} - \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \end{array} \right\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (6.78)$$

$$\Rightarrow \nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}$$

- Equació constitutiva

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}) = \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.79)$$

- Equació geomètrica

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \nabla^S \mathbf{u}^{(2)} - \nabla^S \mathbf{u}^{(1)} = \nabla^S (\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)}) = \nabla^S \tilde{\mathbf{u}} \quad (6.80)$$

- Condicions de contorn a Γ_u amb $\tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0}$

$$\Gamma_u \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^* = \mathbf{0} \quad \forall t \Rightarrow \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} = \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.81)$$

- Condicions de contorn a Γ_σ amb $\tilde{\mathbf{t}}^* = \mathbf{0}$

$$\Gamma_\sigma \rightarrow \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{n} = (\boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}) \cdot \mathbf{n} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* - \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \quad (6.82)$$

- Condicions inicials amb $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \underbrace{\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, 0)}_{=\mathbf{0}} - \underbrace{\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, 0)}_{=\mathbf{0}} = \mathbf{0} \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, 0) = \underbrace{\dot{\mathbf{u}}^{(2)}(\mathbf{x}, 0)}_{=\mathbf{v}_0} - \underbrace{\dot{\mathbf{u}}^{(1)}(\mathbf{x}, 0)}_{=\mathbf{v}_0} = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (6.83)$$

NOTA

S'aprofita aquí la circumstància que l'operador nabla ($\nabla * (\bullet)$) és un

operador lineal, és a dir:

$$\nabla * (\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$$

$$= \nabla * \mathbf{a} + \nabla * \mathbf{b}$$

on * simbolitza

qualsevol tipus

d'operació diferencial.

Així mateix, l'operador

$\frac{\partial^2 (\bullet, t)}{\partial t^2}$ és també un

operador lineal.

NOTA

S'aplica aquí la

propietat que

l'operador $\mathbf{C} :$ és un

operador lineal, és a dir:

$$\mathbf{C} : (\mathbf{a} + \mathbf{b}) =$$

$$= \mathbf{C} : \mathbf{a} + \mathbf{C} : \mathbf{b}$$

Considerem ara el càlcul de la integral següent:

$$\int_{\partial V} \mathbf{n} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) dS = \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma} \underbrace{(\mathbf{n} \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}})}_{=0 \text{ en } \Gamma_\sigma} \cdot \underbrace{\dot{\tilde{\mathbf{u}}}}_{=0 \text{ en } \Gamma_u} dS \stackrel{\text{Teorema de la divergència}}{=} \int_V \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) dV = 0 \quad (6.84)$$

on s'han tingut en compte les condicions (6.81) i (6.82). Operant sobre l'últim integrant de l'equació (6.84), s'obté:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \\ \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} + \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{\sigma}_{ij} \dot{\tilde{u}}_j \right) = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} \dot{\tilde{u}}_j + \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial \dot{\tilde{u}}_j}{\partial x_i} = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{u}_j}{\partial t^2} \dot{\tilde{u}}_j + \tilde{\sigma}_{ji} \frac{\partial \dot{\tilde{u}}_j}{\partial x_i} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (6.85)$$

on s'ha aplicat la condició (6.78) ($\nabla \cdot \tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2}$). D'altra banda:

NOTA

Es té en compte aquí que $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ és un tensor

simètric i $\dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}$
un tensor antisimètric,
amb la qual cosa

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} = \tilde{\sigma}_{ij} \dot{\tilde{\Omega}}_{ij} = 0.$$

$$\begin{aligned} (\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T &= \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \otimes \nabla = \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \right) + \frac{1}{2} \left(\dot{\tilde{\mathbf{u}}} \otimes \nabla - \nabla \otimes \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \right) = \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} \Rightarrow \\ &\quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \nabla^s \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \quad \dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} = \nabla^a \dot{\tilde{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (6.86)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}}}_{=0} \Rightarrow \boxed{\tilde{\boldsymbol{\sigma}} : (\nabla \dot{\tilde{\mathbf{u}}})^T = \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}}$$

Així mateix, es pot escriure:

NOTA

Es defineix

aquí: $|\tilde{\mathbf{v}}| \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{v}$.

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \rho_0 \frac{\partial \dot{\tilde{\mathbf{u}}}}{\partial t} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial (\dot{\tilde{\mathbf{u}}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}})}{\partial t} = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{d(\overbrace{\tilde{\mathbf{v}} \cdot \tilde{\mathbf{v}}}^{|\tilde{\mathbf{v}}|^2 = \tilde{v}^2})}{dt} = \rho_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \tilde{v}^2 \right) \quad (6.87)$$

$$\boxed{\rho_0 \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t^2} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}} = \rho_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \tilde{v}^2 \right)}$$

Substituint les equacions (6.87) i (6.86) en la (6.85) i aquesta en la (6.84) i tenint en compte, a més, la definició de l'energia interna $\frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dt} = \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV$ de l'equació (6.10):

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V \nabla \cdot (\tilde{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \dot{\tilde{\mathbf{u}}}) dV = \int_V \rho_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \tilde{v}^2 \right) dV + \int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV = \\ &= \underbrace{\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho_0 \tilde{v}^2 dV}_{\frac{d\tilde{\mathcal{K}}}{dt}} + \underbrace{\int_V \tilde{\boldsymbol{\sigma}} : \dot{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV}_{\frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dt}} = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad (6.88)$$

$$\boxed{\frac{d\tilde{\mathcal{K}}}{dt} + \frac{d\tilde{\mathcal{U}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{U}}) = 0 \quad \forall t \geq 0} \quad (6.89)$$

Tanmateix, observeu que en l'instant inicial $t=0$ es compleix (vegeu les equacions (6.10), (6.13) i (6.83)):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}}|_{t=0} &= \int_V \frac{1}{2} \rho_0 \tilde{v}^2|_{t=0} dV = \int_V \frac{1}{2} \rho_0 \underbrace{\tilde{\mathbf{v}}_0}_{\dot{\mathbf{u}}_0=0} \cdot \tilde{\mathbf{v}}_0 dV = 0 \\ \tilde{\mathcal{U}}|_{t=0} &= \int_V \underbrace{\hat{u}(\mathbf{x}, t)|_{t=0}}_{\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}} dV = \int_V \frac{1}{2} \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{t=0}}_{=0} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}|_{t=0} dV = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{U}})|_{t=0} = 0 \quad (6.90)$$

i la integració de l'equació (6.89) amb la condició inicial (6.90) porta a:

$$\boxed{\tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{U}} = 0 \quad \forall t \geq 0} \quad (6.91)$$

on:

$$\tilde{\mathcal{K}} = \int_V \frac{1}{2} \underbrace{\rho_0 \tilde{v}^2}_{\geq 0} dV \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (6.92)$$

La comparació de les equacions (6.92) i (6.91) porta necessàriament a la conclusió:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{U}} &= 0 \\ \tilde{\mathcal{K}} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(t) = \int_V \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \leq 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (6.93)$$

D'altra banda, en ser el tensor constitutiu elàstic \mathbf{C} definit positiu (vegeu l'equació (6.32)):

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) &\geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in V \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \\ \tilde{\mathcal{U}}(t) &= \int_V \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV \geq 0 \quad \forall t \geq 0 \end{aligned} \quad (6.94)$$

i la comparació de les equacions (6.94) i (6.93) necessàriament condueix a:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathcal{U}}(t) &\leq 0 \\ \tilde{\mathcal{U}}(t) &\geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathcal{U}}(t) = \int_V \frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = 0 \quad \forall t \geq 0 \quad (6.95)$$

Recorrent de nou a la condició de definit positiu del tensor \mathbf{C} :

$$\tilde{\mathcal{U}}(t) = \int_V \frac{1}{2} \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\geq 0} dV = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t \geq 0 \quad (6.96)$$

i, necessàriament, de la condició de definit positiu de \mathbf{C} es dedueix que

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} : \mathbf{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = 0 \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \Rightarrow \forall \mathbf{x} \quad \forall t \geq 0 \quad (6.97)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}} \quad (6.98)$$

D'altra banda, substituint l'equació (6.98) en la (6.80), es té:

NOTA

S'aplica aquí el següent teorema del càlcul integral: Si $\phi(\mathbf{x}) \geq 0$ i

$$\int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) d\Omega = 0 \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) = 0 \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (6.99)$$

L'equació (6.99) és un sistema de sis EDP homogeni i de primer ordre. La seva integració condueix a la solució:

NOTA
Aquesta solució es pot obtenir aplicant la metodologia d'integració del camp de deformacions del capítol 3, apartat 3.4.2.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{x}}_{\text{rotació}} + \underbrace{\tilde{\mathbf{c}}}_{\text{translació}} \\ \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & -\tilde{\theta}_3 & \tilde{\theta}_2 \\ \tilde{\theta}_3 & 0 & -\tilde{\theta}_1 \\ -\tilde{\theta}_2 & \tilde{\theta}_1 & 0 \end{bmatrix}; \tilde{\mathbf{c}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6.100)$$

on $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ és un tensor antisimètric (tensor de rotació dependent de tres constants $\{\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \tilde{\theta}_3\}$) i $\tilde{\mathbf{c}}$ un vector constant equivalent a una translació. En definitiva, la solució (6.99) al sistema (6.100) són els desplaçaments $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ compatibles amb una deformació nul·la $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$ que corresponen a un desplaçament de sòlid rígid. Les constants d'integració en $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ i $\tilde{\mathbf{c}}$ es determinen imposant les condicions de contorn (6.81) ($\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$) per la qual cosa, si el moviment de sòlid rígid està impedit a través de les restriccions en Γ_u , s'obté $\tilde{\boldsymbol{\Omega}} = \mathbf{0}$ i $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{0}$. En definitiva:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \cdot \mathbf{x} + \tilde{\mathbf{c}} \\ \tilde{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \mathbf{0} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{c}} \equiv \mathbf{0} \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{0} \Rightarrow \boxed{\mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)}} \quad (6.101)$$

Finalment, substituint l'equació (6.98) ($\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$) en la (6.79), s'obté:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}, t) = \mathbb{C} : \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{0} = \boldsymbol{\sigma}^{(2)} - \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)}} \quad (6.102)$$

Observant les equacions (6.98), (6.101) i (6.102), es pot concloure:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{u}^{(2)} = \mathbf{u}^{(1)} \\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(2)} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(1)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \boldsymbol{\sigma}^{(1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbb{R}^{(2)} = \mathbb{R}^{(1)} \quad (6.103)$$

Així doncs, *la solució és única* (cqdd).

6.9 Principi de Saint-Venant

És un principi empíric que no té una demostració rigorosa. Suposem un sòlid Ω , sotmès a un sistema de forces en el seu contorn caracteritzades pel vector tracció \mathbf{t}^* , vegeu la Figura 6.12. Les accions esmentades donaran lloc a una solució o resposta en desplaçaments, deformacions i tensions

$\mathbb{R}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \left[\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \right]^T$. Considerem ara una part $\hat{\Gamma}$ del contorn Γ_σ ($\hat{\Gamma} \subset \Gamma_\sigma$) del medi esmentat, la dimensió típica del qual és ℓ , i substituïm el sistema d'accions en aquest contorn, $\mathbf{t}^{(1)}$, per un altre sistema

RECORDATORI

Es diu que dos sistemes de forces $\mathbf{t}^{(I)}$ i $\mathbf{t}^{(II)}$ són *estàticament equivalents* si la seva resultant (forces i moments) és el mateix.

$\mathbf{t}^{(II)}$, *estàticament equivalent* a $\mathbf{t}^{(I)}$, sense modificar les accions en la resta de Γ_σ . En modificar les accions, és de suposar que la resposta $\mathbb{R}^{(II)}(\mathbf{x}, t) \equiv [\mathbf{u}^{(II)}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\varepsilon}^{(II)}(\mathbf{x}, t), \boldsymbol{\sigma}^{(II)}(\mathbf{x}, t)]^T$ corresponent serà diferent.

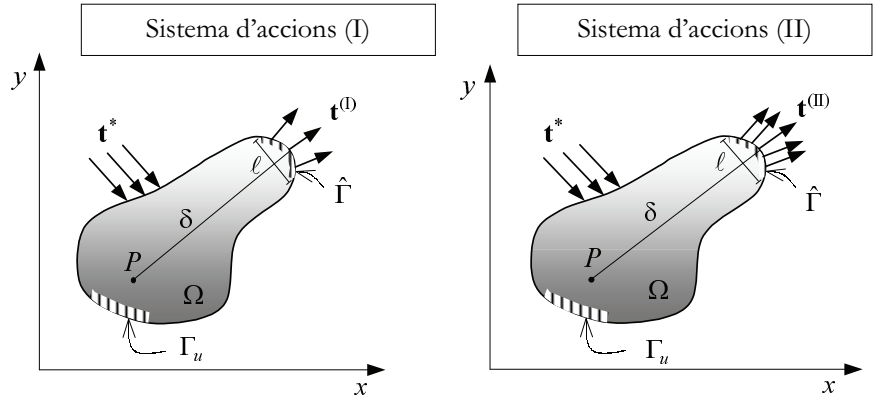


Figura 6.12 – Principi de Saint-Venant

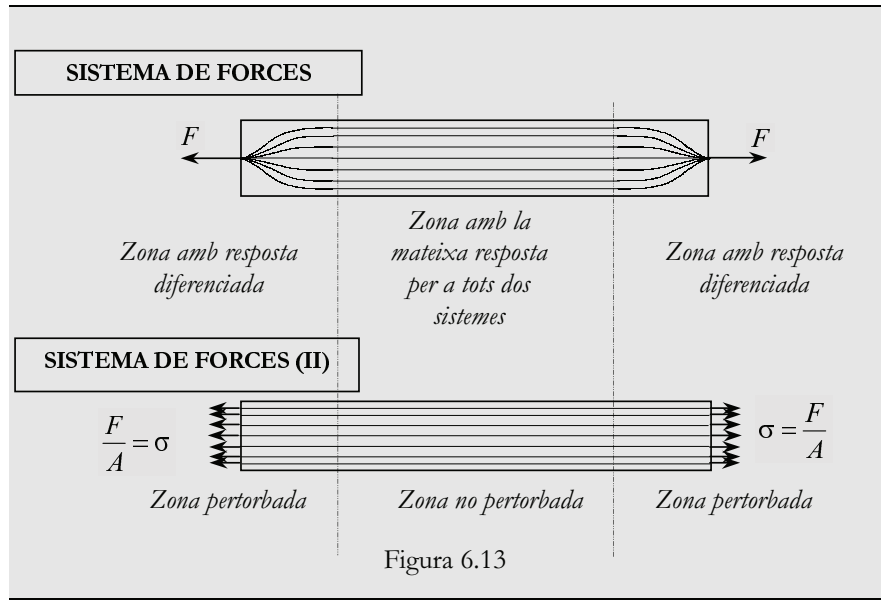
El principi de Saint-Venant estableix que, per a punts del domini Ω prou allunyats del contorn $\hat{\Gamma}$, la solució en tots dos casos és pràcticament la mateixa, és a dir, per a un punt P de l'interior de Ω es compleix:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^{(I)}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \mathbf{u}^{(II)}(\mathbf{x}_P, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \boldsymbol{\varepsilon}^{(II)}(\mathbf{x}_P, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(I)}(\mathbf{x}_P, t) &\approx \boldsymbol{\sigma}^{(II)}(\mathbf{x}_P, t) \end{aligned} \right\} \forall P \mid \delta \gg \ell \quad (6.104)$$

En altres paraules, si la distància δ del punt considerat a la part del contorn en la qual s'han modificat les accions és prou gran comparada amb la dimensió ℓ de la zona modificada, la resposta en aquest punt és equivalent en tots dos casos.

Exemple 6.4 El principi de Saint-Venant s'utilitza sovint en la resistència de materials i resulta fonamental per a la introducció del concepte d'*esforç*.

Suposem una biga (o peça prismàtica) de secció transversal A sotmesa a una força puntual F de tracció als seus extrems (vegeu la Figura 6.13). La solució exacta del problema elàstic original (sistema (I) a la figura) és extremadament complicada, especialment en la proximitat dels punts d'aplicació de les forces puntuals. Si substituïm ara les forces F per un sistema estàticament equivalent de traccions distribuïdes uniformement en la secció extrema $\sigma = F/A$ (sistema (II) a la figura), la solució elàstica del problema corresponent és extremadament simple i coincideix (per a coeficient de Poisson $\nu = 0$) amb la solució davant d'esforç axial proporcionada per la resistència de materials (distribució de tensions uniforme sobre tota la peça $\sigma_x = F/A$). El principi de Saint-Venant permet aproximar la solució (I) per la solució (II) a distància suficient (una o dues vegades el cantell) dels extrems de la biga i dimensionar, als efectes pràctics, les característiques resistents de la peça.



6.10 Termoelasticitat lineal. Tensions i deformacions tèrmiques

La principal diferència de la termoelasticitat lineal respecte a l'elasticitat lineal tractada fins aquí és que deixa de suposar-se que el procés de deformació és isotèrmic (vegeu l'apartat 6.1). Aquí s'inclouen els efectes tèrmics i es considera que la temperatura $\theta(\mathbf{x}, t)$ evoluciona amb el temps, és a dir:

$$\begin{aligned}\theta(\mathbf{x}, t) &\neq \theta(\mathbf{x}, 0) = \theta_0 \\ \dot{\theta}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \theta(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \neq 0\end{aligned}\quad (6.105)$$

Tanmateix, es continua mantenint la hipòtesi que els processos són adiabàtics (lents) i que, per tant:

$$\rho_0 r - \nabla \cdot \mathbf{q} \approx 0 \quad (6.106)$$

6.10.1 Equació constitutiva termoelàstica lineal

La llei de Hooke (6.6) es generalitza en aquest cas a:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\beta}(\theta - \theta_0) \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \beta_{ij}(\theta - \theta_0) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (6.107)$$

on \mathbb{C} és el tensor de constants elàstiques definit en (6.7), $\theta(\mathbf{x}, t)$ és el camp de temperatures, $\theta_0(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}, 0)$ és la distribució de temperatures a l'estat neutre (configuració de referència) i $\boldsymbol{\beta}$ és el tensor (simètric) de propietats tèrmiques:

$$\text{Tensor de propietats tèrmiques} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^T \\ \beta_{ij} = \beta_{ji} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (6.108)$$

NOTA

L'expressió més general d'un *tensor isòtrop de segon ordre* és: $\beta = \beta \mathbf{1} \quad \forall \beta$.

Per al cas de *material isòtrop*, el tensor \mathbb{C} ha de ser un tensor de quart ordre isòtrop i β un de segon ordre isòtrop, és a dir:

$$\begin{cases} \mathbb{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \\ \mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu [\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}] \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \\ \beta = \beta \mathbf{1} \\ \beta_{ij} = \beta \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (6.109)$$

on ara apareix una sola propietat tèrmica β a més de les constants elàstiques λ i μ . Substituint l'equació (6.109) en l'equació constitutiva (6.107) i definint $(\theta - \theta_0)^{not} = \Delta\theta$, s'obté:

Equació constitutiva per a material termo-elàstic lineal isòtrop \rightarrow	$\begin{cases} \sigma = \lambda Tr(\varepsilon) \mathbf{1} + 2\mu \varepsilon - \beta \Delta\theta \mathbf{1} \\ \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ll} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \Delta\theta \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$	(6.110)
--	--	---------

6.10.2 Equació constitutiva inversa

L'equació (6.110) es pot invertir com segueix:

$$\begin{cases} \sigma = \mathbb{C} : \varepsilon - \Delta\theta \beta \Rightarrow \varepsilon = \mathbb{C}^{-1} : \sigma + \Delta\theta \underbrace{\mathbb{C}^{-1} : \beta}_{\alpha} = \mathbb{C}^{-1} : \sigma + \Delta\theta \alpha \\ \alpha = \mathbb{C}^{-1} : \beta \rightarrow \text{Tensor de coeficients de dilatació tèrmica} \end{cases} \quad (6.111)$$

on α és un tensor de segon ordre (simètric) que involucra sis propietats tèrmiques denominades *coeficients de dilatació tèrmica*. Per al cas isòtrop, d'acord amb les equacions (6.110) i (6.24), es pot escriure, després d'una certa manipulació algebraica:

Equació constitutiva inversa per a material termo-elàstic lineal isòtrop \rightarrow	$\begin{cases} \varepsilon = -\frac{\nu}{E} Tr(\sigma) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \sigma + \alpha \Delta\theta \mathbf{1} \\ \varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{ll} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \alpha \Delta\theta \delta_{ij} \\ \quad \quad \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$	(6.112)
--	---	---------

sent α un escalar denominat coeficient de dilatació tèrmica relacionat amb la propietat tèrmica β de l'equació (6.110) mitjançant:

Coeficient de dilatació tèrmica $\rightarrow \alpha = \frac{1-2\nu}{E} \beta$	(6.113)
---	---------

6.10.3 Tensions i deformacions tèrmiques

La comparació de les equacions constitutives elàstica lineal (6.20) i termoelàstica lineal (6.110) suggereix la descomposició següent:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}}_{\boldsymbol{\sigma}^{nt}} - \underbrace{\beta \Delta \theta \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\sigma}^t} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^t$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Tensió no tèrmica} & \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ \text{Tensió tèrmica} & \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^t \stackrel{\text{def}}{=} \beta \Delta \theta \mathbf{1} \end{array} \right. \quad (6.114)$$

on $\boldsymbol{\sigma}^{nt}$ representa la tensió produïda en el cas de no-existència de fenòmens tèrmics i $\boldsymbol{\sigma}^t$ és la denominada *tensió tèrmica* o tensió correctora per l'increment de temperatura.

Una operació similar es pot realitzar amb les equacions constitutives inverses per al cas elàstic lineal i termoelàstic lineal de les equacions (6.24) i (6.112), i s'obté:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\underbrace{\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^{nt}} + \underbrace{\alpha \Delta \theta \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\varepsilon}^t} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^t$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Deformació no tèrmica} & \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} \\ \text{Deformació tèrmica} & \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^t \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \Delta \theta \mathbf{1} \end{array} \right. \quad (6.115)$$

En definitiva, en termoelasticitat lineal es poden realitzar les següents descomposicions dels tensors de tensió i de deformació:

Total	Component no tèrmic	Component tèrmic	
$\boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^t}$	$\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$ <i>Material isòtrop:</i> $\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma}^t = \Delta \theta \boldsymbol{\beta}$ <i>Material isòtrop:</i> $\boldsymbol{\sigma}^t = \beta \Delta \theta \mathbf{1}$	(6.116)
$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^t}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$ <i>Material isòtrop:</i> $\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}$	$\boldsymbol{\varepsilon}^t = \Delta \theta \boldsymbol{\alpha}$ <i>Material isòtrop:</i> $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \alpha \Delta \theta \mathbf{1}$	(6.117)

on els components tèrmics apareixen a causa de la consideració de processos tèrmics. A partir de les equacions (6.116) i (6.117), es poden obtenir les expressions següents:

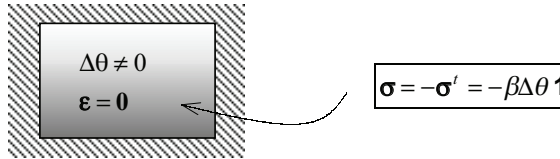
$$\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbf{C} : [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t] \quad (6.118)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbf{C}^{-1} : [\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^t] \quad (6.119)$$

Observació 6-11

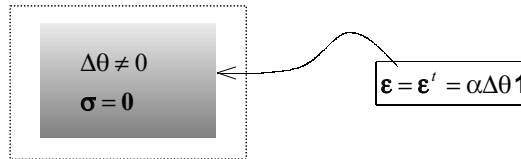
Al contrari del que passa en elasticitat, en el cas termoelàstic *un estat de deformació nul·la* en un punt del medi *no implica un estat de tensió nul·la*. En efecte, per a $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}$ de l'equació (6.116), s'obté:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -\boldsymbol{\sigma}^t = -\beta \Delta\theta \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$$

**Observació 6-12**

Anàlogament, en termoelasticitat *un estat de tensió nul·la* en un punt *no implica una deformació nul·la* en el punt esmentat ja que de l'equació (6.117) amb $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^t = \alpha \Delta\theta \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$$



6.11 Analogies tèrmiques

Les analogies tèrmiques sorgeixen de la recerca de procediments de resolució del problema *termoelàstic* lineal fent servir les estratègies i metodologies de resolució desenvolupades a l'apartat 6.7 per al problema *elàstic* lineal (sense consideració d'efectes tèrmics).

En aquest apartat es presenten dues analogies que, per raons de simplicitat, es restringeixen al problema quasistàtic i isòtrop, encara que poden ser directament extrapolables al problema general dinàmic i anisòtrop.

6.11.1 Primera analogia tèrmica (analogia de Duhamel-Newman)

Suposem el medi continu de la Figura 6-14 sobre el qual actuen unes forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, un increment de la temperatura $\Delta\theta(\mathbf{x}, t)$ i en els contorns del qual Γ_u i Γ_σ hi ha uns desplaçaments imposats $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ i un vector tracció \mathbf{t}^* , respectivament.

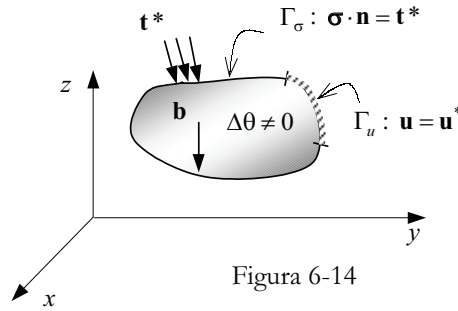


Figura 6-14

Les equacions del problema termoelàstic lineal (quasiestàtic i isòtrop) són les següents:

Equacions de govern: \rightarrow $\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} & \rightarrow \text{eq. d'equilibri} \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \beta \Delta \theta \mathbf{1} & \rightarrow \text{eq. constitutiva} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} & \rightarrow \text{eq. geomètrica} \end{cases}$	(6.120)
Condicions de contorn: \rightarrow $\begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \end{cases}$	

NOTA

El camp d'increment tèrmic $\Delta \theta(\mathbf{x}, t)$ se suposa conegut *a priori* i, per tant, independent de la resposta mecànica del problema. Aquesta situació es coneix com a problema termomecànic *desacoblat*.

que configuren les accions (dades) $\mathbb{A}(\mathbf{x}, t)$ i respostes (incògnites) $\mathbb{R}(\mathbf{x}, t)$ del problema:

$\begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \Delta \theta(\mathbf{x}, t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{cases}$	(6.121)
<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> Accions = $\mathbb{A}^{(I)}(\mathbf{x}, t)$ Respostes = $\mathbb{A}^{(I)}(\mathbf{x}, t)$ </div>	

Per poder aplicar mètodes de resolució típics del problema elàstic lineal, de l'apartat 6.7 cal eliminar (almenys aparentment) el terme tèrmic de les equacions del problema termoelàstic (6.120). Per a això es recorre a la descomposició de les tensions $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^t$ i se substitueix en les equacions (6.120) de la forma següent:

a) Equació d'equilibri

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^t \Rightarrow$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \nabla \cdot \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^t}_{\beta \Delta \theta \mathbf{1}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \nabla (\beta \Delta \theta) \quad (6.122)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{nt} + \rho_0 \left[\underbrace{\mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \nabla (\beta \Delta \theta)}_{\substack{\text{not} \\ = \hat{\mathbf{b}}}} \right] = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{nt} + \rho_0 \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0}} \quad (6.123)$$

que constitueix l'equació d'equilibri del medi sota unes *pseudoforces màssiques* $\hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t)$ definides per:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\beta \Delta \theta) \\ \hat{b}_i(\mathbf{x}, t) = b_i(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial(\beta \Delta \theta)}{\partial x_i} \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (6.124)$$

b) Equació constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.125)$$

c) Equació geomètrica (resta inalterada)

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \quad (6.126)$$

d) Condicció de contorn en Γ_u

$$\Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad (6.127)$$

e) Condicció de contorn en Γ_σ

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}^t \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{t}}^* \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt} \cdot \mathbf{n} - \boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}^* \Rightarrow \left. \begin{aligned} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^{nt} \cdot \mathbf{n} &= \hat{\mathbf{t}}^* + \underbrace{\boldsymbol{\sigma}^t \cdot \mathbf{n}}_{\beta \Delta \theta \mathbf{1} \cdot \mathbf{n}} = \hat{\mathbf{t}}^* + (\beta \Delta \theta) \mathbf{n} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}^{nt} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}^* \quad (6.128)$$

on $\hat{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}, t)$ és un *pseudovector de tracció* definit com:

$$\hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + (\beta \Delta \theta) \mathbf{n} \quad (6.129)$$

Les equacions (6.122) a (6.129) permeten de reescriure el problema original (6.120) com:

Equacions de govern: $\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{nt} + \rho_0 \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{0} & \rightarrow \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\beta \Delta \theta) \\ \boldsymbol{\sigma}^{nt} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} \end{cases}$	(6.130)
Condicions de contorn: $\rightarrow \begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}^{nt} \cdot \mathbf{n} = \hat{\mathbf{t}}^* \rightarrow \hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + \beta \Delta \theta \mathbf{n} \end{cases}$	

que constitueix el denominat *problema anàleg*, que és un problema elàstic lineal que es pot resoldre amb la metodologia indicada per a aquest tipus de problemes a l'apartat 6.7 i que es caracteritza per les accions-respostes següents:

$$\underbrace{\begin{cases} \hat{\mathbf{b}}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\mathbf{t}}^*(\mathbf{x}, t) \end{cases}}_{\text{Accions} = \mathbb{A}^{(II)}(\mathbf{x}, t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{nt}(\mathbf{x}, t) \end{cases}}_{\text{Respostes} = \mathbb{R}^{(II)}(\mathbf{x}, t)} \quad (6.131)$$

Observant les accions i respostes del problema original (6.121) i del problema anàleg (6.131), s'observa que la seva diferència és:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(I)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A}^{(III)}(\mathbf{x}, t) &= \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u}^* \\ \mathbf{t}^* \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{u}^* \\ \hat{\mathbf{t}}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{t}^* - \hat{\mathbf{t}}^* \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\rho_0} \nabla(\beta\Delta\theta) \\ \mathbf{0} \\ -(\beta\Delta\theta)\mathbf{n} \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{A}^{(III)} \\ \mathbf{R}^{(I)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}^{(III)}(\mathbf{x}, t) &= \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma}^{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \underbrace{\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{nt}}_{-\boldsymbol{\sigma}'} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\beta\Delta\theta\mathbf{1} \end{Bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{R}^{(III)} \end{aligned} \quad (6.132)$$

on s'han tingut en compte les equacions (6.129) ($\hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + (\beta\Delta\theta)\mathbf{n}$) i (6.116) ($\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}^{nt} - \beta\Delta\theta\mathbf{1}$).

Observació 6-13

És immediat comprovar que, en les equacions (6.132), $\mathbf{R}^{(III)}$ és la resposta corresponent al sistema d'accions $\mathbf{A}^{(III)}$ en el problema termoelàstic (6.120).

L'equació (6.132) suggereix que el problema original (I) es pot visualitzar com la suma (superposició) de dos problemes o estats:

ESTAT (II) (a resoldre): Estat *anàleg elàstic* en el qual no intervé la temperatura i que es pot resoldre mitjançant procediments *elàstics*.
+
ESTAT (III) (trivial): Estat *termoelàstic* trivial en el qual es coneixen sense necessitat de càlculs les respostes $\mathbf{R}^{(III)}(\mathbf{x})$ donades a (6.132).

Un cop calculat l'ESTAT (II), la solució del problema original termoelàstic de l'ESTAT (I) s'obté com:

$$\begin{array}{l} \text{Solució del} \\ \text{problema} \\ \text{termoelàstic original} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}^{(I)} = \mathbf{u}^{(II)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(II)} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(I)} = \boldsymbol{\sigma}^{(II)} - \beta\Delta\theta\mathbf{1} \end{cases} \quad (6.133)$$

La síntesi del procediment de resolució del problema termoelàstic basat en la primera analogia tèrmica es presenta com una superposició d'estats a la Figura 6-15.

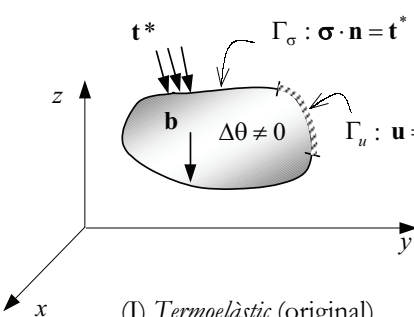
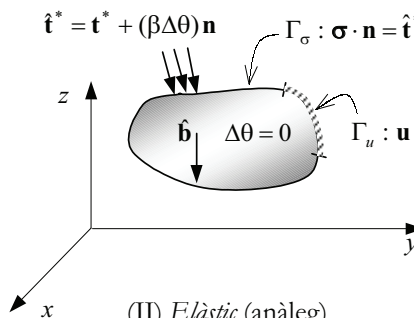
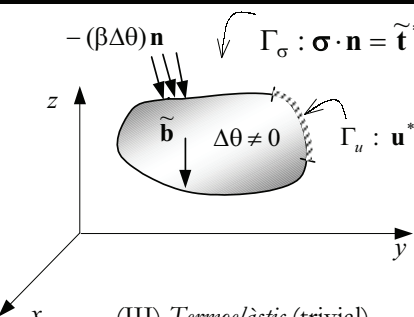
ESTAT	Acció	Resposta
 <p>(I) <i>Termoelàstic</i> (original)</p>	$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \Delta\theta(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$
 <p>(II) <i>Elastíc</i> (anàleg)</p>	$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b} - \frac{1}{\rho_0} \nabla(\beta\Delta\theta) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \hat{\mathbf{t}}^* = \mathbf{t}^* + (\beta\Delta\theta)\mathbf{n} \\ \Delta\theta = 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^m(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$
 <p>(III) <i>Termoelàstic</i> (trivial)</p>	$\begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{b}} = \frac{1}{\rho_0} \nabla(\beta\Delta\theta) \\ \tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{t}}^* = -(\beta\Delta\theta)\mathbf{n} \\ \Delta\theta(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} = -(\beta\Delta\theta)\mathbf{1} \end{Bmatrix}$

Figura 6-15 – Primera analogia tèrmica

6.11.2 Segona analogia tèrmica

La segona analogia es basa en escriure les equacions del problema en funció de les deformacions tèrmiques $\boldsymbol{\varepsilon}'$ de l'equació (6.117). Considerem les equacions del problema termoelàstic original escrivint l'equació constitutiva en forma inversa:

Equacions de govern	$\rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} & \rightarrow \text{eq. d'equilibri} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + (\alpha \Delta \theta) \mathbf{1} & \rightarrow \text{eq. constitutiva inversa} \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} & \rightarrow \text{eq. geomètrica} \end{cases}$	(6.134)
Condicions de contorn: $\rightarrow \begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \end{cases}$		

que configuren les accions (dades) $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ i respostes (incògnites) $\mathbf{R}(\mathbf{x}, t)$ del problema:

$\underbrace{\begin{cases} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \Delta \theta(\mathbf{x}, t) \end{cases}}_{\text{Accions} = \mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}, t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{cases} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{cases}}_{\text{Respostes} = \mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{x}, t)}$	(6.135)
--	---------

Hipòtesi

Suposem que el coeficient de dilatació tèrmica $\alpha(\mathbf{x})$ i l'increment tèrmic $\Delta \theta(\mathbf{x}, t)$ són tals que el camp de deformacions tèrmiques

$$\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}, t) = \alpha(\mathbf{x}) \Delta \theta(\mathbf{x}, t) \mathbf{1}$$

és integrable (compleix les equacions de compatibilitat).

Per tant, existeix un camp de *desplaçaments tèrmics* $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ que compleix:

$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}, t) = (\alpha \Delta \theta) \mathbf{1} = \nabla^S \mathbf{u}' = \frac{1}{2} (\mathbf{u}' \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}') \\ \varepsilon'_{ij} = (\alpha \Delta \theta) \delta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$	(6.136)
--	---------

Observació 6-14

La solució $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ del sistema d'equacions diferencials (6.136) existeix si, i només si, el camp de deformacions $\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}, t)$ compleix les equacions de compatibilitat (vegeu el capítol 3). A més, la solució esmentada està determinada *llevat d'un moviment de sòlid rígid* caracteritzat per un tensor de rotació $\boldsymbol{\Omega}^*$ i un vector de desplaçament \mathbf{c}^* (tots dos constants). És a dir, hi ha una família de solucions admissibles de la forma:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{x}}_{\text{rotació}} + \underbrace{\mathbf{c}^*}_{\text{translació}}$$

moviment de sòlid rígid

El moviment de sòlid rígid esmentat pot ser escollit *arbitràriament* (de la forma més convenient per al procés de resolució).

Una vegada definits els desplaçaments tèrmics es pot realitzar una descomposició dels desplaçaments totals en les seves parts tèrmica i no-tèrmica com segueix:

$$\mathbf{u}^{nt}(\mathbf{x}, t) \stackrel{def}{=} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) \Rightarrow \boxed{\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^t} \quad (6.137)$$

Per eliminar el terme tèrmic de les equacions del problema termoelàstic (6.134) es recorre a la descomposició dels desplaçaments i de les deformacions en les seves parts tèrmica i no-tèrmica ($\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^t$ i $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^t$) i se substitueix en les equacions (6.134) que es transformen de la forma següent:

a) Equació d'equilibri (resta inalterada)

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}} \quad (6.138)$$

b) Equació constitutiva

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma}} \quad (6.139)$$

c) Equació geomètrica

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \nabla^S \mathbf{u} = \nabla^S (\mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^t) = \nabla^S \mathbf{u}^{nt} + \underbrace{\nabla^S \mathbf{u}^t}_{\boldsymbol{\varepsilon}^t} = \nabla^S \mathbf{u}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^t \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \nabla^S \mathbf{u}^{nt}} \quad (6.140)$$

d) Condicció de contorn a Γ_u

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^t \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Gamma_u : \mathbf{u}^{nt} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^t \quad (6.141)$$

e) Condicció de contorn a Γ_σ (roman inalterada)

$$\boxed{\Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^*} \quad (6.142)$$

Les equacions (6.138) a (6.142) permeten reescriure el problema original (6.134) com:

Equacions de govern	→	$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} & \rightarrow \text{eq. d'equilibri} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} & \rightarrow \text{eq. constitutiva inversa} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} = \nabla^S \mathbf{u}^{nt} & \rightarrow \text{eq. geomètrica} \end{cases}$	(6.143)
<div style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px auto; width: 80%;"> Condicions de contorn :→ $\begin{cases} \Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^t \\ \Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^* \end{cases}$ </div>			

que constitueix el *problema anàleg* elàstic lineal caracteritzat per les accions-respostes següents:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}^t(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}}_{\text{Accions} = \mathbf{A}^{(II)}(\mathbf{x}, t)} \Rightarrow \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{nt}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}}_{\text{Respostes} = \mathbf{R}^{(II)}(\mathbf{x}, t)} \quad (6.144)$$

Observant les accions i respostes del problema original (6.135) i del problema anàleg (6.144), s'observa que la seva diferència és:

$$\mathbf{A}^{(I)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{A}^{(II)}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u}^* \\ \mathbf{t}^* \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^t \\ \mathbf{t}^* \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{u}^t \\ \mathbf{0} \\ \Delta\theta \end{Bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{A}^{(III)} \quad (6.145)$$

$$\mathbf{R}^{(I)}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{R}^{(II)}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{nt} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \boldsymbol{\varepsilon}^t \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^t \\ \alpha\Delta\theta \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} \stackrel{def}{=} \mathbf{R}^{(III)}$$

on s'han tingut en compte les equacions (6.117) ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{nt} + \boldsymbol{\varepsilon}^t$) i (6.137) ($\mathbf{u} = \mathbf{u}^{nt} + \mathbf{u}^t$).

Observació 6-15

És immediat comprovar que, en les equacions (6.145), $\mathbf{R}^{(III)}$ és la resposta corresponent al sistema d'accions $\mathbf{A}^{(III)}$ en el problema termoelàstic (6.134).

Per tant, el problema original (I) es pot contemplar com la suma (superposició) de dos problemes o estats:

ESTAT (II) (a resoldre): Estat *anàleg elàstic* en el qual no intervé la temperatura i que es pot resoldre mitjançant procediments *elàstics*.

+

ESTAT (III) (trivial): Estat *termoelàstic* trivial en el qual es coneixen, sense necessitat de càlculs, les respostes $\mathbf{R}^{(III)}(\mathbf{x})$ donades a (6.145).

Un cop calculat l'ESTAT (II) la solució del problema original termoelàstic de l'ESTAT (I) s'obté com:

$$\begin{array}{l} \text{Solució del} \\ \text{problema} \\ \text{termoelàstic original} \end{array} \rightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(I)} = \mathbf{u}^{(II)} + \mathbf{u}^t \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(I)} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(II)} + \alpha\Delta\theta \mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sigma}^{(I)} = \boldsymbol{\sigma}^{(II)} \end{Bmatrix} \quad (6.146)$$

on \mathbf{u}^t es coneix del procés d'integració del camp de deformacions tèrmiques en l'equació (6.136). La síntesi del procediment de resolució del problema termoelàstic basat en la segona analogia tèrmica es presenta com una superposició d'estats en la Figura 6-16.

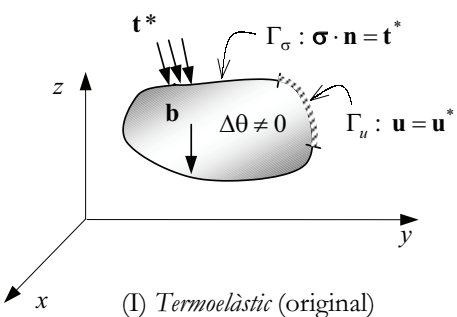
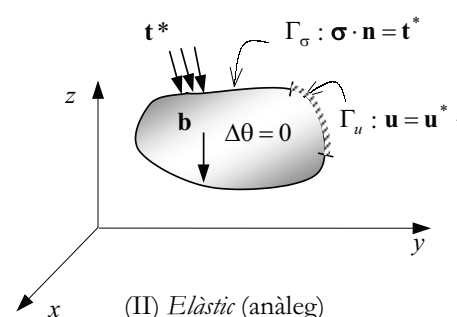
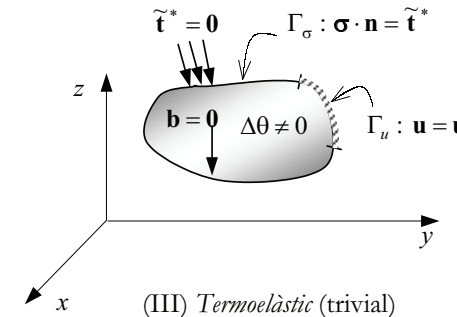
ESTAT	Acció	Resposta
 <p>(I) <i>Termoelàstic</i> (original)</p>	$\begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \Delta\theta(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$
 <p>(II) <i>Elàstic</i> (anàleg)</p>	$\begin{Bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u}^* - \mathbf{u}' \\ \mathbf{t}^* \\ \Delta\theta = 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{nt}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{nt}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$
 <p>(III) <i>Termoelàstic</i> (trivial)</p>	$\begin{Bmatrix} \mathbf{b} = 0 \\ \tilde{\mathbf{u}}^* = \mathbf{u}' \\ \tilde{\mathbf{t}}^* = 0 \\ \Delta\theta(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = (\alpha\Delta\theta)\mathbf{1} \\ \boldsymbol{\sigma} = 0 \end{Bmatrix}$

Figura 6-16 – Segona analogia tèrmica

Exemple 6-5 Resoleu mitjançant la segona analogia tèrmica el problema uniaxial d'una biga encastada en ambdós extrems sobre la qual actua un increment de temperatura constant $\Delta\theta$ (Figura 6-17).

Resolució

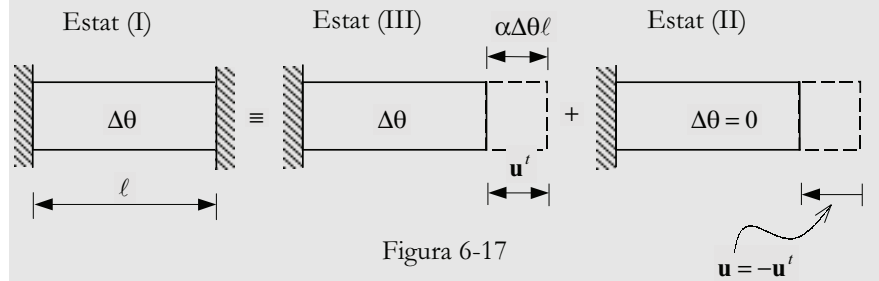
El procediment clàssic de resolució en resistència de materials consisteix en la superposició (suma) de les situacions següents: 1) es considera l'estructura inicialment hiperestàtica, 2) s'allibera l'extrem dret per permetre l'expansió

tèrmica, que es produeix (pel fet que l'estructura és isostàtica) amb tensions nul·les i 3) es *recupera* el desplaçament de l'extrem dret de la biga fins a portar-lo novament a zero.

Aquest procediment coincideix exactament amb l'aplicació de la segona analogia tèrmica en què el camp de desplaçaments tèrmics \mathbf{u}' ve definit per l'expansió tèrmica de la peça amb el seu extrem dret alliberat (estat III). Aquesta expansió produeix un desplaçament en l'extrem de valor esmentat $u|_{x=\ell} = \alpha \Delta \theta \ell$ i en recuperar el desplaçament en aquest extrem s'està aplicant implícitament la condició de contorn

$$\Gamma_u : \mathbf{u} = \underbrace{\mathbf{u}^*}_{\mathbf{0}} - \mathbf{u}' = -\mathbf{u}'$$

que correspon exactament amb l'estat II de la Figura 6-16.



Observació 6-16

L'aplicació de la segona analogia tèrmica resideix fonamentalment en la integració del camp de deformacions tèrmiques $\boldsymbol{\varepsilon}'(\mathbf{x}, t)$ per obtenir el camp de desplaçaments tèrmics $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ (vegeu l'Observació 6-14). Si les deformacions tèrmiques no són integrables, l'analogia no és aplicable. Comparant els seus avantatges i inconvenients davant la 1a analogia, és també recomanable que la integració de les deformacions tèrmiques sigui, a més de possible, *simple* de realitzar.

Observació 6-17

El cas particular de:

- *material homogeni* ($\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{x}) = \text{cte} = \boldsymbol{\alpha}$)
- *increment tèrmic lineal* ($\Delta\theta = ax + by + cz + d$)

té un interès particular. En aquest cas el producte $\Delta\theta\boldsymbol{\alpha}$ és un polinomi lineal i les deformacions tèrmiques $\boldsymbol{\varepsilon}' = \Delta\theta\boldsymbol{\alpha}$ compleixen automàticament les equacions de compatibilitat (6.68) (que són equacions que només contenen derivades de segon ordre), per la qual cosa es pot garantir que *el camp de deformacions tèrmiques és integrable*.

Observació 6-18

Per al cas amb:

- *material homogeni* ($\alpha(\mathbf{x}) = \text{constant} = \alpha$)
- *increment tèrmic comptant* ($\Delta\theta = \text{constant}$)

la integració del camp de deformació tèrmica $\boldsymbol{\varepsilon}^t = \Delta\theta\alpha\mathbf{1}$ = constant resulta trivial resultant:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \alpha\Delta\theta\mathbf{x} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega}^* \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c}^*}_{\text{moviment de sòlid rígid}}$$

on el moviment de sòlid rígid es pot escollir arbitràriament (vegeu l'Observació 6-14). Fent nul aquest moviment, la solució per al desplaçament tèrmic resulta ser:

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \alpha\Delta\theta\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{u}' = \mathbf{x} + \alpha\Delta\theta\mathbf{x} = (1 + \alpha\Delta\theta)\mathbf{x}$$

amb la qual cosa l'ESTAT III de la segona analogia (vegeu la Figura 6-16) resulta ser una homotècia, respecte a l'origen de coordenades, de raó $(1 + \alpha\Delta\theta)$. L'homotècia esmentada és coneguda com a *expansió tèrmica lliure* (vegeu la Figura 6-18).

NOTA

L'origen de coordenades, i, per tant, l'origen de l'homotècia, es pot escollir arbitràriament de la forma més convenient per simplificar l'anàlisi.

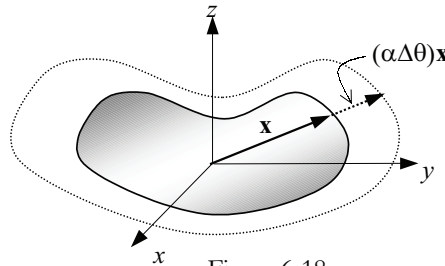


Figura 6-18

El valor del desplaçament tèrmic (associat a l'expansió tèrmica lliure) en el contorn Γ_u es pot determinar en aquest cas de forma trivial sense necessitat d'integrar *formalment* les deformacions tèrmiques.

6.12 Principi de superposició en termoelasticitat lineal

Considerem el problema termoelàstic lineal de la Figura 6-19 i les equacions de govern corresponents del problema:

Equació de Cauchy:	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}$	(6.147)
Equació constitutiva:	$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{\lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{C}:\boldsymbol{\varepsilon}} - \beta \Delta \theta \mathbf{1}$	
Equació geomètrica:	$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u})$	
Condicions de contorn en l'espai:	$\Gamma_u : \mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ $\Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$	(6.148)
Condicions inicials:	$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$ $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0$	(6.149)

que defineixen el conjunt genèric acció-resposta:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \\ \Delta \theta(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} \quad (6.150)$$

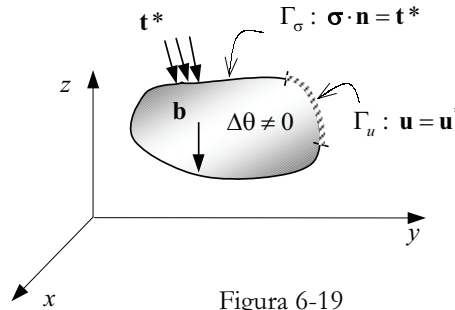


Figura 6-19

Observació 6-19

Els diferents operadors (escalars, vectorials, tensorials i diferencials) que intervenen en les equacions de govern del problema (6.147) a (6.149) són lineals, és a dir, donats dos escalars a i b qualsevol:

$$\nabla \cdot (\bullet) \rightarrow \text{lineal} \Rightarrow \nabla \cdot (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\nabla \cdot \mathbf{x} + b\nabla \cdot \mathbf{y}$$

$$\mathbf{C} : (\bullet) \rightarrow \text{lineal} \Rightarrow \mathbf{C} : [a\mathbf{x} + b\mathbf{y}] = a\mathbf{C} : \mathbf{x} + b\mathbf{C} : \mathbf{y}$$

$$\nabla^S (\bullet) \rightarrow \text{lineal} \Rightarrow \nabla^S (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = a\nabla^S \mathbf{x} + b\nabla^S \mathbf{y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\bullet) \rightarrow \text{lineal} \Rightarrow \frac{\partial^2 (a\mathbf{x} + b\mathbf{y})}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} + b \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial t^2}$$

Considerem ara dos possibles sistemes d'accions $\mathbf{A}^{(1)}$ i $\mathbf{A}^{(2)}$:

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^{*(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^{*(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \Delta\theta^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}_0^{(1)}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{b}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{u}^{*(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{t}^{*(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \Delta\theta^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{v}_0^{(2)}(\mathbf{x}) \end{Bmatrix} \quad (6.151)$$

i les respostes respectives:

$$\mathbf{R}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{R}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \equiv \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \\ \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \end{Bmatrix} \quad (6.152)$$

Teorema (*Principi de superposició*):

La solució (resposta) al sistema d'accions $\mathbf{A}^{(3)} = \lambda^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{A}^{(2)}$ (sent $\lambda^{(1)}$ i $\lambda^{(2)}$ dos escalars qualsevol) és $\mathbf{R}^{(3)} = \lambda^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{R}^{(2)}$.

En altres paraules: *la solució del problema termoelàstic lineal davant d'una combinació lineal de diferents sistemes d'accions és la mateixa combinació lineal de les solucions davant de cada un d'ells.*

Demostració

Substituint les dades $\mathbf{A}^{(3)} = \lambda^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{A}^{(2)}$ i la solució $\mathbf{R}^{(3)} = \lambda^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{R}^{(2)}$ en les equacions del problema, i tenint en compte la linealitat dels diferents operadors (vegeu l'Observació 6-19) es té:

a) Equació de Cauchy

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(3)} + \rho_0 \mathbf{b}^{(3)} &= \lambda^{(1)} \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)} + \rho_0 \mathbf{b}^{(1)})}_{\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(1)}}{\partial t^2}} + \lambda^{(2)} \underbrace{(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(2)} + \rho_0 \mathbf{b}^{(2)})}_{\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(2)}}{\partial t^2}} = \\ &= \rho_0 \frac{\partial^2 (\lambda^{(1)} \mathbf{u}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{u}^{(2)})}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(3)}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (6.153)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(3)} + \rho_0 \mathbf{b}^{(3)} = \rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(3)}}{\partial t^2}}$$

b) Equació constitutiva

$$\boldsymbol{\sigma}^{(3)} - (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \beta \Delta \theta^{(3)} \mathbf{1}) = \lambda^{(1)} \left[\underbrace{\boldsymbol{\sigma}^{(1)} - (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \beta \Delta \theta^{(1)} \mathbf{1})}_{=0} \right] + \left. \lambda^{(2)} \left[\underbrace{\boldsymbol{\sigma}^{(2)} - (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \beta \Delta \theta^{(2)} \mathbf{1})}_{=0} \right] \right\} = \mathbf{0} \Rightarrow \quad (6.154)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^{(3)} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \beta \Delta \theta^{(3)} \mathbf{1}}$$

c) Equació geomètrica

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} - \nabla^S \mathbf{u}^{(3)} = \lambda^{(1)} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} - \nabla^S \mathbf{u}^{(1)})}_{=0} + \lambda^{(2)} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} - \nabla^S \mathbf{u}^{(2)})}_{=0} = \mathbf{0} \quad (6.155)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = \nabla^S \mathbf{u}^{(3)}}$$

d) Condió de contorn a Γ_u

$$\mathbf{u}^{(3)} - \mathbf{u}^{*(3)} = \lambda^{(1)} \underbrace{(\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{*(1)})}_{=0} + \lambda^{(2)} \underbrace{(\mathbf{u}^{(2)} - \mathbf{u}^{*(2)})}_{=0} = \mathbf{0} \quad (6.156)$$

$$\boxed{\Gamma_u : \mathbf{u}^{(3)} = \mathbf{u}^{*(3)}}$$

e) Condió de contorn a Γ_σ

$$\boldsymbol{\sigma}^{(3)} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^{*(3)} = \lambda^{(1)} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^{*(1)})}_{=0} + \lambda^{(2)} \underbrace{(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^{*(2)})}_{=0} = \mathbf{0} \quad (6.157)$$

$$\boxed{\Gamma_\sigma : \boldsymbol{\sigma}^{(3)} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^{*(3)}}$$

f) Condicions inicials

$$\mathbf{u}^{(3)}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{v}_0^{(3)} = \lambda^{(1)} \underbrace{(\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{v}_0^{(1)})}_{=0} + \lambda^{(2)} \underbrace{(\mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}, 0) - \mathbf{v}_0^{(2)})}_{=0} = \mathbf{0} \quad (6.158)$$

$$\boxed{\mathbf{u}^{(3)}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0^{(3)}}$$

Per tant, $\mathbf{R}^{(3)} = \lambda^{(1)} \mathbf{R}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{R}^{(2)} \equiv \{\mathbf{u}^{(3)}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)}, \boldsymbol{\sigma}^{(3)}\}^T$ és la solució del problema elàstic en les accions: $\mathbf{A}^{(3)} = \lambda^{(1)} \mathbf{A}^{(1)} + \lambda^{(2)} \mathbf{A}^{(2)}$ cqd.

6.13 Llei de Hooke en funció dels “vectors” de tensió i de deformació

La simetria dels tensors de tensió, $\boldsymbol{\sigma}$, i de deformació, $\boldsymbol{\varepsilon}$, fa que, dels seus nou components en un determinat sistema cartesià, només sis siguin diferents. En conseqüència, i per raons d’“economia” en l’escriptura, és tradicional en enginyeria treballar només amb els sis components diferents introduint els denominats “vectors” de tensió i de deformació. Aquests es construeixen en \mathbb{R}^6 ordenant de forma sistemàtica els elements del *triangle superior* de la matriu de components del tensor corresponent:

NOTACIÓ

Es farà servir la notació $\{\mathbf{x}\}$ per denotar el vector en \mathbb{R}^6 construït a partir del tensor simètric \mathbf{x} .

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\sigma}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \in \mathbb{R}^6 \quad (6.159)$$

El mateix passa amb les deformacions amb la particularitat que, per construir el vector de deformació $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$, s'utilitzen les deformacions angulars $\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$, $\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$, $\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$ (vegeu el capítol 2, apartat 2.11.4):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \stackrel{\text{not.}}{=} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6.160)$$

Observació 6-20

Una propietat interessant de la construcció esmentada és que el producte doblement contrès dels tensors de tensió i de deformació ($\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}$) es transforma en el producte *escalar* (en \mathbb{R}^6) dels vectors de tensió i de deformació: $(\{\boldsymbol{\sigma}\}, \{\boldsymbol{\varepsilon}\})$:

$$\underbrace{\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}}_{\substack{\text{Tensors} \\ \text{de} \\ \text{segon} \\ \text{ordre}}} = \underbrace{\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}}_{\text{Vectors}} = \Leftrightarrow \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_i \varepsilon_i$$

com es pot comprovar realitzant les operacions esmentades a partir de les definicions a (6.159) i (6.160).

L'equació constitutiva inversa (6.112):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} + \alpha \Delta \theta \mathbf{1} \quad (6.161)$$

es pot reescriure ara en funció dels vectors de tensió i de deformació com:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \hat{\mathbf{C}}^{-1} : \{\boldsymbol{\sigma}\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t \quad (6.162)$$

on $\hat{\mathbf{C}}^{-1}$ és una matriu inversa de constants elàstiques:

$$\hat{\mathbf{C}}^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{array} \right] \quad (6.163)$$

i $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t$ un vector de deformacions tèrmiques que s'escriu mitjançant la *traducció* adequada del tensor de deformacions tèrmiques $\alpha \Delta\theta \mathbf{1}$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^t \equiv \begin{bmatrix} \alpha\Delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\Delta\theta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\Delta\theta \end{bmatrix} \rightarrow \{\boldsymbol{\varepsilon}\}^t = \begin{bmatrix} \alpha\Delta\theta \\ \alpha\Delta\theta \\ \alpha\Delta\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.164)$$

Finalment, la inversió de l'equació (6.162) proporciona la *lleï de Hooke* en funció dels vectors de tensió i de deformació:

Llei de Hooke en funció
dels vectors de
tensió i deformació

$$\rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \hat{\mathbf{C}} (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^t) \quad (6.165)$$

essent $\hat{\mathbf{C}}$ la matriu de constants elàstiques:

$$\hat{\mathbf{C}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{array} \right] \quad (6.166)$$

7 Elasticitat lineal plana

7.1 Introducció

Com s'ha vist en el capítol 6, des del punt de vista matemàtic, el problema elàstic consisteix en un sistema d'EDP que s'ha de resoldre en les tres dimensions de l'espai i en la dimensió associada al temps ($\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$). Tanmateix, hi ha certes situacions en què el problema esmentat es pot simplificar, i el problema es redueix a dues dimensions espacials \mathbb{R}^2 , a més de reduir-se, eventualment, a la dimensió temporal ($\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$). La possibilitat d'aquesta simplificació rau en què, en determinats casos, la mateixa geometria i condicions de contorn del problema permeten identificar una *direcció irrellevant* (associada a una dimensió del problema) de forma que es poden plantejar *a priori* solucions del problema elàstic *independents de la dimensió esmentada*.

Si es considera un sistema local de coordenades $\{x, y, z\}$ en el qual la direcció irrellevant (suposada constant) coincideix amb la direcció z , l'anàlisi queda reduït al pla $\{x, y\}$ i d'aquí el nom *d'elasticitat plana* amb el qual se solen denominar aquests problemes. Al seu torn, aquests se solen dividir en dos grans grups associats a dues famílies d'hipòtesis simplificatives:

- Problemes de *tensió plana*.
- Problemes de *deformació plana*.

Per simplicitat, considerarem aquí el cas *isotèrmic*, encara que no hi ha cap limitació intrínseca per a la generalització, al cas termoelàstic, dels resultats que s'obtinguin.

7.2 Estat de tensió plana

L'estat de tensió plana es caracteritza per les hipòtesis simplificatives següents:

- 1) *L'estat tensional és de la forma:*

$$[\sigma]_{xyz} \equiv \left[\begin{array}{cc|c} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (7.1)$$

- 2) Les tensions no nul·les (és a dir, les associades al pla $x-y$) no depenen de la variable z :

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, t) \quad ; \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, t) \quad ; \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, t) \quad (7.2)$$

Per analitzar en quines condicions les hipòtesis anteriors resulten raonables, considerem un medi elàstic pla les dimensions i forma associades al pla $x-y$ (que denominarem *pla d'anàlisi*) del qual són arbitràries i tal que la tercera dimensió (que denominarem *el gruix* de la peça) queda associada a l'eix z (vegeu la Figura 7-1). Suposarem que es donen les circumstàncies següents sobre el medi elàstic en qüestió:

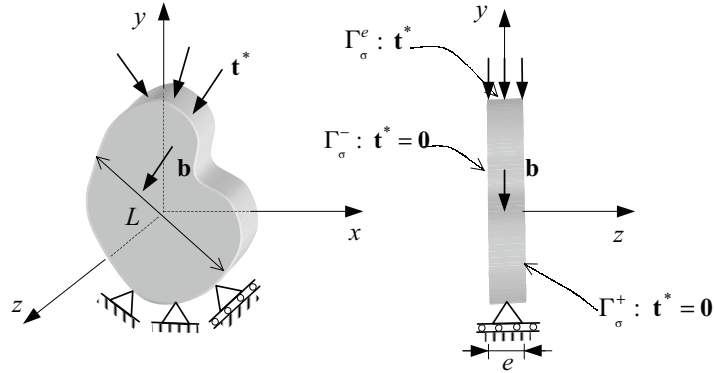


Figura 7-1 – Exemple d'estat de tensió plana

- a) El gruix e és molt inferior a la dimensió típica associada al pla d'anàlisi $x-y$:

$$e \ll L \quad (7.3)$$

- b) Les accions (forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, desplaçaments imposats $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ i vector tracció $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$) estan contingudes al pla d'anàlisi $x-y$ (el seu component z és nul) i, a més, no depenen de la tercera dimensió:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x, y, t) \\ b_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x, y, t) \\ u_y^*(x, y, t) \\ - \end{Bmatrix} \quad (7.4)$$

$$\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- \cup \Gamma_\sigma^e : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x, y, t) \\ t_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

- c) El vector tracció $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ només és diferent de zero sobre el contorn del gruix de la peça (contorn Γ_σ^e), mentre que sobre les superfícies laterals Γ_σ^+ i Γ_σ^- és nul (vegeu la Figura 7-1).

$$\Gamma_\sigma^+ \cup \Gamma_\sigma^- : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.5)$$

Observació 7-1

La peça amb geometria i accions definides per les equacions (7.3) i (7.4) i l'estat de tensió plana, indicat per les equacions (7.1) i (7.2) i esquematitzat a la Figura 7-2, resulten compatibles. En efecte, aplicant les condicions de contorn Γ_σ sobre la peça s'obté el següent:

- *Superfícies laterals:* Γ_σ^+ y Γ_σ^- :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- *Cantell* Γ_σ^e :

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \cdot \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x(x, y, t) \\ t_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

compatibles amb les suposicions (7.4) i (7.5).

NOTA
El fet que totes les tensions no nul·les estiguin contingudes al pla $x - y$ dóna lloc al nom de *tensió plana*.

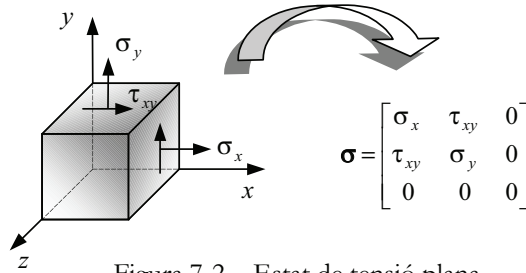


Figura 7-2 – Estat de tensió plana

7.2.1 Camp de deformacions. Equació constitutiva

Considerem ara l'equació constitutiva elàstica lineal:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} = -\frac{\nu}{E} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} \quad (7.6)$$

que, aplicada a l'estat tensional (7.1) i en notació enginyeril, proporciona les deformacions següents:

RECORDATORI

Les deformacions angulars es defineixen com:

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu\sigma_y] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu\sigma_x] & \gamma_{xz} &= \frac{1}{G} \tau_{xz} = 0 \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] = -\frac{\nu}{E} [\sigma_x + \sigma_y] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

on s'han tingut en compte les condicions $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. Donades les equacions (7.2) i (7.7) es pot concloure que les deformacions tampoc no depenen de la

coordenada z ($\Rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t)$). Així mateix, en l'equació (7.7) es pot resoldre la deformació ε_z com:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.8)$$

En definitiva, el tensor de deformacions per al cas de tensió plana resulta:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.9)$$

i la substitució de l'equació (7.8) en l'equació (7.7) condueix, després d'algunes operacions algebraiques, a:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}[\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}[\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy} \end{aligned} \quad (7.10)$$

que es pot escriure com:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} = \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{T.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \Rightarrow \boxed{\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{C}^{T.P.} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}} \quad (7.11)$$

7.2.2 Camp de desplaçaments

Les equacions geomètriques del problema:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{u}) \Rightarrow \quad (7.12)$$

es poden descompondre en dos grups:

- 1) Les que no afecten el desplaçament u_z (i que serien hipotèticament integrables en \mathbb{R}^2 , en el domini $x-y$):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy}(x, y, t) = 2\varepsilon_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{integració en } \mathbb{R}^2} \begin{cases} u_x = u_x(x, y, t) \\ u_y = u_y(x, y, t) \end{cases} \quad (7.13)$$

2) Aquelles en les quals intervé el desplaçament u_z :

$$\begin{aligned}\varepsilon_z(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ \gamma_{xz}(x, y, t) = 2\varepsilon_{xz} &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{yz}(x, y, t) = 2\varepsilon_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (7.14)$$

L'observació de les equacions (7.1) a (7.14) suggereix la consideració d'un *problema elàstic ideal de tensió plana reduït* a les dues dimensions del pla d'anàlisi i caracteritzat per les incògnites següents:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.15)$$

on les incògnites addicionals respecte al problema general, o bé són nul·les, o bé són calculables en funció de les (7.15), o bé no intervenen en el problema reduït:

$$\begin{aligned}\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} &= 0 \\ \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \\ u_z(x, y, z, t) &\rightarrow \text{No intervé en el problema}\end{aligned}\quad (7.16)$$

Observació 7-2

El problema de tensió plana és un problema elàstic *ideal* atès que no es pot reproduir exactament com un cas particular del problema elàstic en tres dimensions. Efectivament, no hi ha garantia que la solució del problema reduït de tensió plana $u_x(x, y, t)$, $u_y(x, y, t)$ permeti obtenir una solució $u_z(x, y, z, t)$ per a les equacions geomètriques addicionals (7.14).

7.3 Deformació plana

L'estat de deformació es caracteritza per les hipòtesis simplifícatives següents:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.17)$$

En aquest cas, també resulta il·lustratiu analitzar en quines situacions les hipòtesis esmentades són plausibles. Considerem, per exemple, un medi elàstic la geometria i les accions del qual es poden generar a partir d'una secció bidimensional (associada al pla $x-y$ i amb les accions $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ i $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ contingudes en el pla esmentat) que es trasllada sobre una generatriu recta perpendicular a aquesta, associada a l'eix z (vegeu la Figura 7-3).

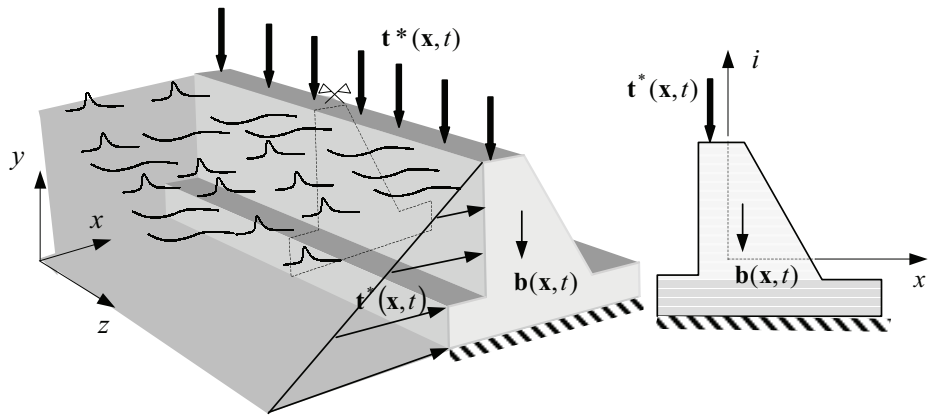


Figura 7-3 – Exemple d'estat de deformació plana

Les accions del problema es poden caracteritzar llavors com:

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} b_x(x, y, t) \\ b_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{Bmatrix} u_x^*(x, y, t) \\ u_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \begin{Bmatrix} t_x^*(x, y, t) \\ t_y^*(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.18)$$

i a la secció central (que presenta la simetria respecte a l'eix z) es compleix que:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0 \quad (7.19)$$

i, per tant, el camp de desplaçaments en aquesta secció central és del tipus:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (7.20)$$

7.3.1 Camps de deformacions i de tensions

Al camp de desplaçaments propi de l'estat de deformació plana (7.20) li correspon el camp de deformacions següent:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial x} & \varepsilon_z(x, y, t) &= \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \\ \varepsilon_y(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial y} & \gamma_{xz}(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0 \\ \gamma_{xy}(x, y, t) &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} & \gamma_{yz}(x, y, t) &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \end{aligned} \quad (7.21)$$

amb la qual cosa el tensor de deformacions té l'estructura següent:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.22)$$

NOTA

Per analogia amb el cas de tensió plana, el fet que totes les *deformacions* no nul·les estiguin contingudes al pla $x - y$ dóna lloc al nom de *deformació plana*.

Considerem ara l'equació constitutiva elàstica lineal:

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} = \lambda \text{Tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \mathbf{1} + 2G \boldsymbol{\epsilon} \quad (7.23)$$

que, aplicada al camp de deformacions (7.21), proporciona les tensions de la forma següent:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_x = (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) + 2\mu\epsilon_y = (\lambda + 2G)\epsilon_y + \lambda\epsilon_x & \tau_{xz} &= G\gamma_{xz} = 0 \\ \sigma_z &= \lambda(\epsilon_x + \epsilon_y) & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (7.24)$$

Ateses les equacions (7.21) i (7.24), es pot concloure que *les tensions tampoc depenen de la coordenada z* ($\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(x, y, t)$). D'altra banda, en l'equació (7.24) es pot resoldre la tensió σ_z com:

$$\sigma_z = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma_x + \sigma_y) = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.25)$$

i el tensor de tensions per al cas de deformació plana resulta:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \quad \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y) \quad (7.26)$$

on els components no nuls del tensor de tensions (7.26) s'escriuen així:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (\lambda + 2G)\epsilon_x + \lambda\epsilon_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_y \right] \\ \sigma_y &= (\lambda + 2G)\epsilon_y + \lambda\epsilon_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\epsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} \epsilon_x \right] \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (7.27)$$

L'equació (7.27) es pot rescriure en forma matricial com:

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\sigma}\}} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^{D.P.}} \underbrace{\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}_{\{\boldsymbol{\epsilon}\}} \Rightarrow \quad (7.28)$$

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{C}^{D.P.} \cdot \{\boldsymbol{\epsilon}\}$$

De forma similar com passa amb el problema de tensió plana, les equacions (7.20), (7.21) i (7.26) suggereixen la consideració d'un *problema elàstic de deformació plana* reduït a les dues dimensions del pla d'anàlisi $x-y$ caracteritzat per les incògnites següents:

$$\mathbf{u}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\epsilon}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (7.29)$$

en el qual les incògnites addicionals respecte al problema general, o bé són nul·les, o bé són calculables en funció de les (7.29):

$$\begin{aligned}
 u_z &= 0 \\
 \varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 \\
 \sigma_z &= \nu(\sigma_x + \sigma_y)
 \end{aligned}
 \quad (7.30)$$

7.4 El problema elàstic lineal en elasticitat bidimensional

Ateses les equacions dels apartats 7.2 i 7.3 el problema elàstic lineal per als problemes de tensió i deformació plana es caracteritza de la manera següent (vegeu la Figura 7-4):

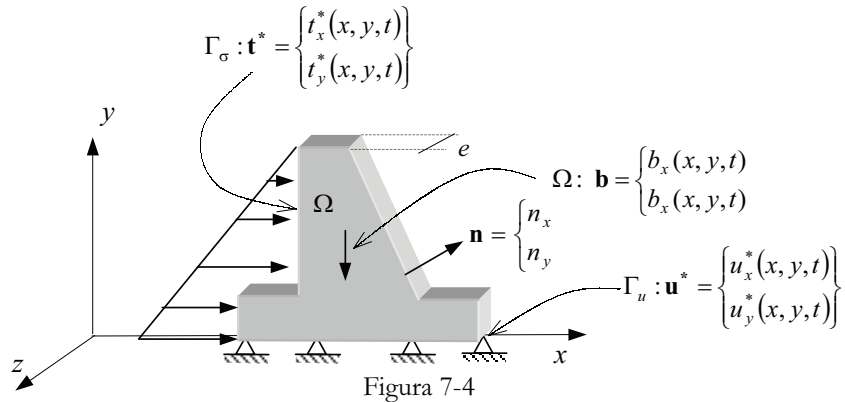


Figura 7-4

a) Equacions

Equació de Cauchy:

NOTA
La tercera equació corresponent al component z , o bé no hi intervé (tensió plana), o és idènticament nul·la (deformació plana).

$$\begin{cases}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \rho b_x = \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \rho b_y = \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}
 \end{cases}
 \quad (7.31)$$

Equació constitutiva:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\boldsymbol{\sigma}\} = \mathbf{C} \cdot \{\boldsymbol{\varepsilon}\}
 \quad (7.32)$$

on la matriu constitutiva \mathbf{C} es pot escriure de forma genèrica a partir de les equacions (7.11) i (7.28) com:

$$\mathbf{C} = \frac{\bar{E}}{1 - \bar{\nu}^2} \begin{bmatrix} 1 & \bar{\nu} & 0 \\ \bar{\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \bar{\nu}}{2} \end{bmatrix}
 \begin{array}{l}
 \text{Tensió plana} \\
 \text{Deformació plana}
 \end{array}
 \rightarrow
 \begin{cases}
 \bar{E} = E \\
 \bar{\nu} = \nu \\
 \bar{E} = \frac{E}{1 - \nu^2} \\
 \bar{\nu} = \frac{\nu}{(1 - \nu)}
 \end{cases}
 \quad (7.33)$$

Equacions geomètriques:

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}} \quad (7.34)$$

Condicions de contorn a l'espai:

$$\boxed{\Gamma_u : \mathbf{u}^* = \begin{cases} u_x^* = u_x^*(x, y, t) \\ u_y^* = u_y^*(x, y, t) \end{cases} \quad \Gamma_\sigma : \mathbf{t}^* = \begin{cases} t_x^* = t_x^*(x, y, t) \\ t_y^* = t_y^*(x, y, t) \end{cases}} \quad (7.35)$$

$$\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \quad \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \end{Bmatrix}$$

Condicions inicials:

$$\boxed{\mathbf{u}(x, y, t)|_{t=0} = \mathbf{0} \quad \dot{\mathbf{u}}(x, y, t)|_{t=0} = \mathbf{v}_0(x, y)} \quad (7.36)$$

b) Incògnites

$$\boxed{\mathbf{u}(x, y, t) = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}(x, y, t) \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}} \quad (7.37)$$

Les equacions (7.31) a (7.37) defineixen un sistema d'EDP de 8 equacions amb 8 incògnites que s'ha de resoldre en el domini espai-temps *reduït* $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$. Un cop resolt el problema, es poden calcular explícitament:

$$\text{Tensió plana} \rightarrow \varepsilon_z = \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (7.38)$$

$$\text{Deformació plana} \rightarrow \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y)$$

7.5 Problemes assimilables a elasticitat bidimensional

7.5.1 Tensió plana

Serán típicament assimilables a estats de tensió plana aquells estats tensodeformacionals produïts en sòlids amb *una dimensió sensiblement inferior a les altres dues* (que configuren el pla d'anàlisi $x-y$) i amb accions contingudes en el pla esmentat. La placa carregada en el seu pla mitjà i la biga de gran cantell de la Figura 7-5 són exemples típics d'estructures analitzables en estat de tensió plana. Com a cas particular, els problemes de *flexió simple i composta de bigues de pla mitjà*, considerats en la resistència de materials, poden ser també assimilats a problemes de tensió plana.

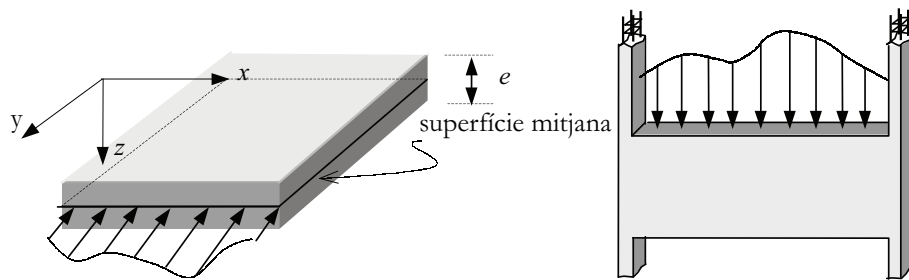


Figura 7-5 – Placa carregada en el seu pla mitjà i biga de gran cantell

7.5.2 Deformació plana

Seràn típicament assimilables a estats de deformació plana aquells sòlids la geometria dels quals es pot obtenir com a resultat del desplaçament d'una *secció generatriu plana amb accions contingudes en el seu pla* (pla d'anàlisi $x-y$) sobre una línia perpendicular a aquesta. A més, la hipòtesi de deformació plana $\epsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ha de ser justificable. Típicament, la situació esmentada es produeix en dues circumstàncies:

- 1) *La dimensió de la peça en la direcció z és molt gran* (als efectes de l'anàlisi es pot considerar infinita). En aquest cas, tota secció transversal central (no propera als extrems) es pot considerar de simetria i, per tant, satisfà les condicions:

$$u_z = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 0$$

d'on es conclouen les condicions de partida de l'estat de deformació plana (7.17):

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} u_x(x, y, t) \\ u_y(x, y, t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Exemples d'aquest cas els trobem a les canonades de pressió interna (i/o externa) de la Figura 7-6, el túnel de la Figura 7-7 o la sabata contínua de la Figura 7-8.

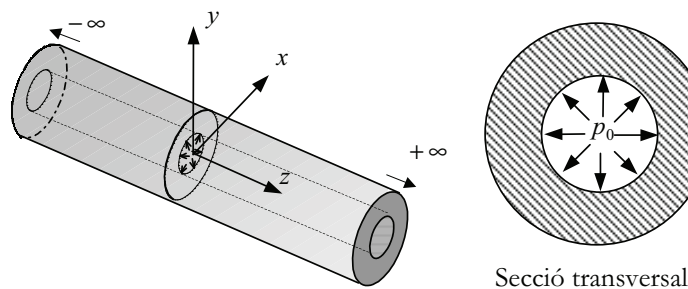
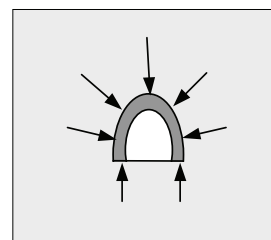
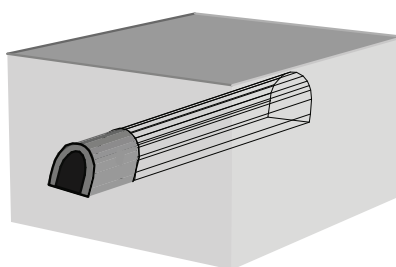


Figura 7-6 – Tub de pressió



Secció transversal

Figura 7-7 – Túnel

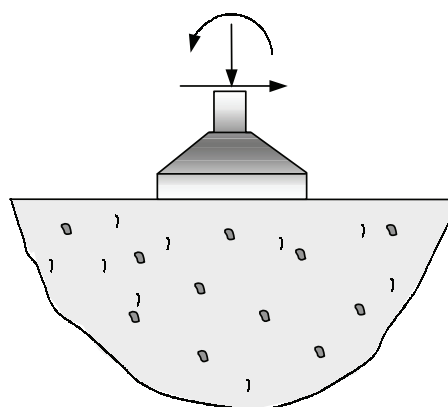
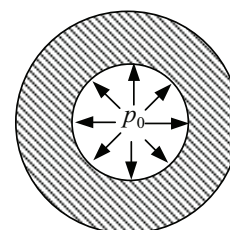
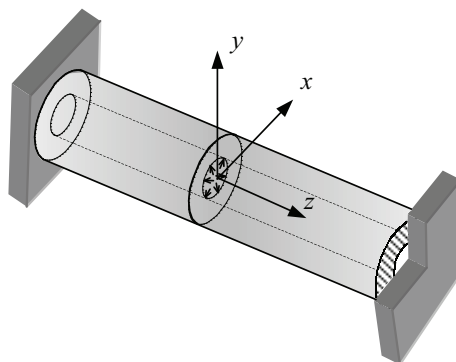


Figura 7-8 – Sabata contínua

- 2) *La longitud de la peça en la direcció longitudinal és reduïda, però el desplaçament en la direcció z s'impedeix en les seccions extremes* (vegeu la Figura 7-9).

En aquest cas la hipòtesi de deformació plana (7.17) es pot fer per a totes les seccions transversals de la peça.



Secció transversal

Figura 7-9

7.6 Corbes representatives dels estats plans de tensió

Hi ha una important tradició en enginyeria de representar gràficament la distribució dels estats tensionals plans. Per a això es recorre a certes famílies de corbes el traçat sobre el pla d'anàlisi de les quals proporciona informació útil sobre l'estat tensional.

7.6.1 Línies isostàtiques

Definició

Línies isostàtiques: són les *envolupants* del camp vectorial determinat per les tensions principals.

Per definició d'envolupant d'un camp vectorial, les línies isostàtiques seran, en cada punt, tangents a les dues direccions principals i, per tant, hi haurà dues famílies de línies isostàtiques:

- *Isostàtiques* σ_1 , tangents a la tensió principal més gran.
- *Isostàtiques* σ_2 , tangents a la tensió principal més petita.

A més, atès que les tensions principals són ortogonals entre si, *les dues famílies de corbes seran també ortogonals*. Les línies isostàtiques informen sobre la manera com transcorre sobre el pla d'anàlisi el flux de tensions principals. Com a exemple, en la Figura 7-10 es presenta la distribució de línies isostàtiques sobre una biga recolzada amb càrrega distribuïda uniformement.

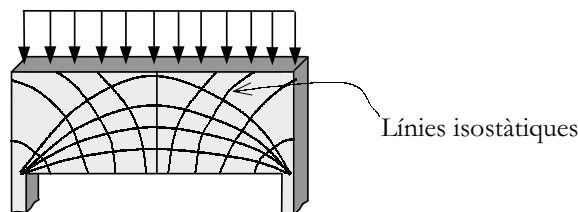


Figura 7-10

Definicions

Punt singular: Punt caracteritzat per un estat tensional:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

El seu cercle de Mohr és *un punt* de l'eix σ (vegeu la Figura 7-11).

Punt neutre: Punt singular caracteritzat per un estat tensional:

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

El seu cercle de Mohr és *l'origen* de l'espai $\sigma - \tau$ (vegeu la Figura 7-11).

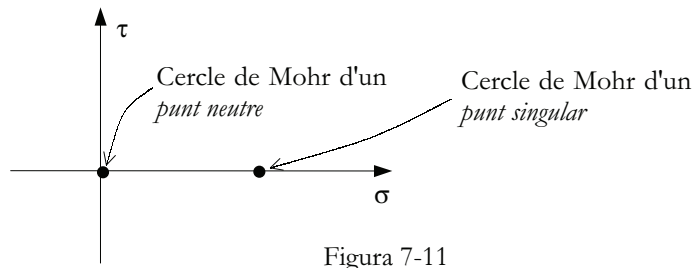


Figura 7-11

Observació 7-3

En un punt singular totes les direccions són principals (el pol és el mateix cercle de Mohr (vegeu la Figura 7-11)). Per tant, en els punts singulars les línies isostàtiques solen perdre la seva regularitat i *poden canviar bruscament de direcció*.

7.6.1.1 Equació diferencial de les línies isostàtiques

Tenint en compte l'equació genèrica d'una isostàtica $y = f(x)$ i el valor d'angle format per la direcció principal σ_1 amb l'horitzontal (vegeu la Figura 7-12):

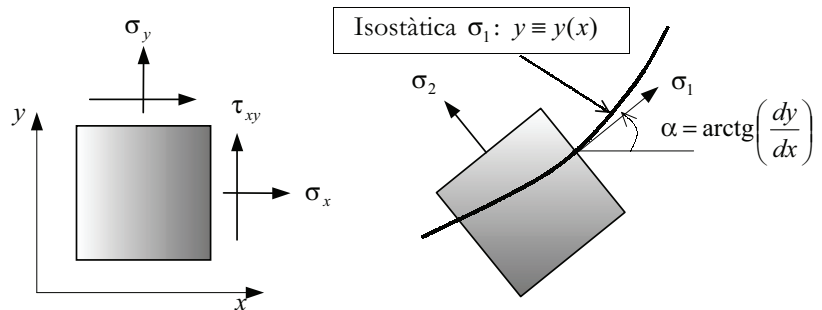


Figura 7-12

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg}(2\alpha) &= \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{dy}{dx} = y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2y'}{1 - (y')^2} \Rightarrow \quad (7.39)$$

$$(y')^2 + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\tau_{xy}} y' - 1 = 0$$

i resolent l'equació de segon grau de (7.39) en y' , s'obté l'equació diferencial de les isostàtiques:

$$\left. \begin{aligned} &\text{Equació} \\ &\text{diferencial de} \\ &\text{les isostàtiques} \end{aligned} \right\} \rightarrow y' = - \underbrace{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)^2 + 1}}_{\varphi(x,y)} \quad (7.40)$$

Coneguda la funció $\varphi(x, y)$ en l'equació (7.40), es pot integrar l'equació esmentada a fi d'obtenir l'equació algebraica la família d'isostàtiques:

$$y = f(x) + C \quad (7.41)$$

El doble signe en l'equació (7.40) donarà lloc a dues equacions diferencials corresponents a les dues famílies ortogonals d'isostàtiques.

Exemple 7-1 Una placa està sotmesa al següent estat tensional (vegeu Figura 7-13):

$$\sigma_x = -x^3 \quad ; \quad \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 \quad ; \quad \tau_{xy} = 3x^2y \quad ; \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0$$

Obteniu i dibuixeu-ne els punts singulars i la xarxa d'isostàtiques.

Resolució

a) *Punts singulars*: es defineixen segons:
$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_y \\ \tau_{xy} = 0 \end{cases}$$

$$\tau_{xy} = 3x^2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -x^3 = 0 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 0 \end{cases} \quad \forall y \\ y=0 \Rightarrow \begin{cases} \sigma_x = -x^3 \\ \sigma_y = 2x^3 - 3xy^2 = 2x^3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x=0$$

Així, el lloc geomètric dels punts singulars és la recta: $x=0$. Els punts singulars esmentats són, a més, punts neutres ($\sigma_x = \sigma_y = 0$).

b) *Línies isostàtiques*: De l'equació (7.40):

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)^2 + 1}$$

que, per a les dades del problema, resulta:

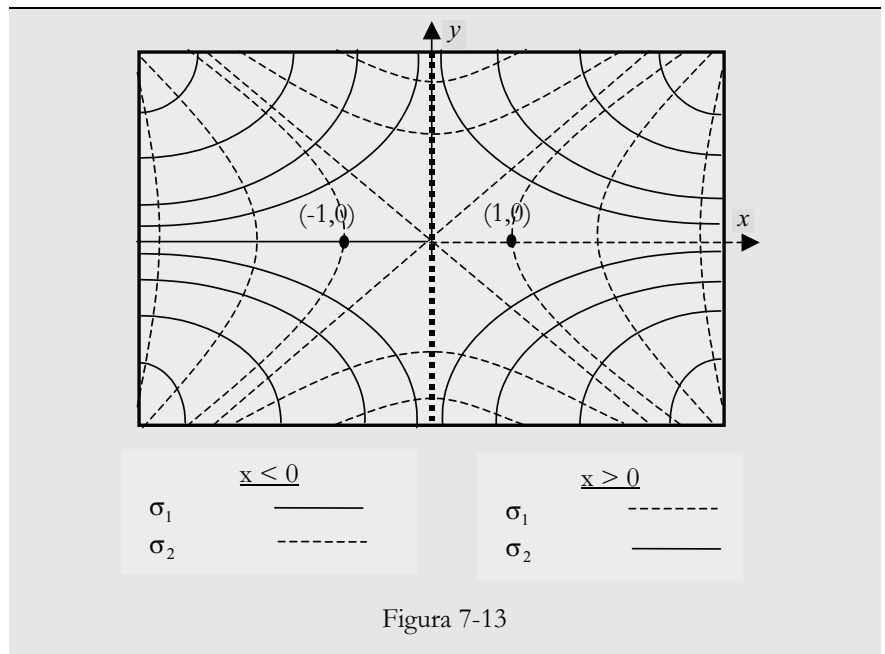
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \\ \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \text{integrant: } \begin{cases} x^2 - y^2 = C_1 \\ xy = C_2 \end{cases}$$

per tant, les isostàtiques són dues famílies d'hipèrboles equilàteres ortogonals entre si.

Sobre la recta singular de punts singulars $x=0$ (que divideix la placa en dues regions) les línies *isostàtiques* canviaran bruscament de pendent. Per identificar la família d'isostàtiques σ_1 agafem un punt a cada regió:

- Punt (1,0): $\sigma_x = \sigma_2 = -1$; $\sigma_y = \sigma_1 = +2$; $\tau_{xy} = 0$
(isostàtica σ_1 a la direcció y)
- Punt (-1,0): $\sigma_x = \sigma_1 = +1$; $\sigma_y = \sigma_2 = -2$; $\tau_{xy} = 0$
(isostàtica σ_1 a la direcció x)

Per tant, la xarxa de les isostàtiques és la que s'indica a la Figura 7-13.



7.6.2 Línies isoclínes

Definició

Línies isoclínes: lloc geomètric dels punts del pla d'anàlisi en els quals les tensions principals formen un determinat angle amb l'eix x .

Per la seva pròpia definició, en tots els punts d'una mateixa isoclina les tensions principals són paral·leles entre si, formant un angle constant θ (que caracteritza la isoclina) amb l'eix x (vegeu la Figura 7-14).

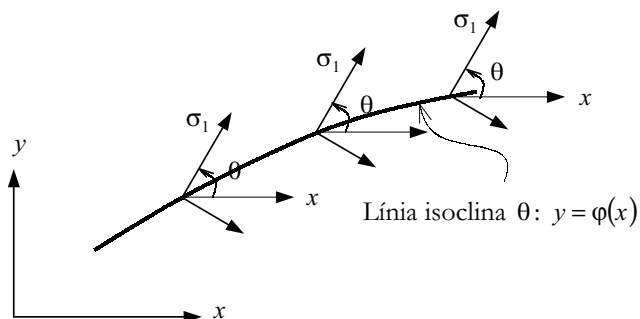


Figura 7-14 – Línia isoclina

7.6.2.1 Equació de les isoclines

Per obtenir l'equació $y = f(x)$ de la isoclina d'angle θ , s'estableix que la tensió principal σ_1 forma un angle $\alpha = \theta$ amb l'horitzontal, és a dir:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equació} \\ \text{algebraica de} \\ \text{les isoclines} \end{array} \right\} \rightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2\tau_{xy}}{\underbrace{\sigma_x - \sigma_y}_{\varphi(x,y)}} \quad (7.42)$$

equació algebraica que per a cada valor de θ permet aïllar:

$$y = f(x, \theta) \quad (7.43)$$

que constitueix l'equació de la família de corbes isoclines parametritzada en funció de l'angle θ .

Observació 7-4

La determinació de la família de les isoclines permet conèixer, en cada punt del medi, la direcció de les tensions principals i, per tant, plantejar l'obtenció de les línies isostàtiques. Atès que les isoclines es poden determinar mitjançant mètodes experimentals (mètodes basats en la fotoelasticitat), *proporcionen, indirectament, un mètode per a la determinació experimental de les línies isostàtiques.*

7.6.3 Línies isòbares

Definició

Línies isòbares: lloc geomètric dels punts del pla d'anàlisi amb el mateix valor de la tensió principal σ_1 (o σ_2).

Per cada punt del pla d'anàlisi passaran dues famílies de corbes isòbares: una corresponent a σ_1 i una altra a σ_2 . Les línies isòbares depenen del valor de σ_1 , però no de la seva direcció (vegeu la Figura 7-15).

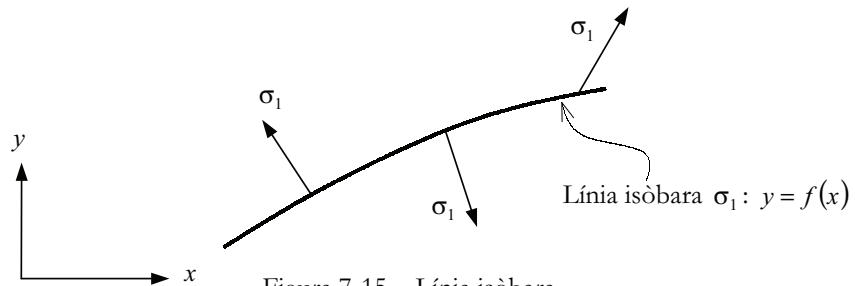


Figura 7-15 – Línia isòbara

7.6.3.1 Equació de les isòbares

L'equació que proporciona el valor de les tensions principals (vegeu el capítol 4) defineix en forma implícita l'equació algebraica de les dues famílies d'isòbares $y = f_1(x, c_1)$ i $y = f_2(x, c_2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{\varphi_1(x,y)} = \text{constant} = c_1 \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}}_{\varphi_2(x,y)} = \text{constant} = c_2 \end{array} \right. \quad (7.44)$$

Equació algebraica de →
les isòbares

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x, c_1) \\ y_2 = f_2(x, c_2) \end{cases}$$

7.6.4 Línies de màxima tensió tallant

Definició

Línies de màxima tensió tallant (o tangencial): són les envoltants de les direccions que, en cada punt, corresponen a la màxima (en mòdul) tensió tangencial.

Observació 7-5

En cada punt del pla d'anàlisi hi ha dos plans sobre els quals les tensions tangencials prenen el mateix valor màxim (en mòdul) i signe contrari τ_{max} y τ_{min} . Aquests plans es poden determinar amb ajuda del cercle de Mohr i formen un angle de 45° amb les direccions principals (vegeu la Figura 7-16). Per tant, les seves envoltants (les línies de màxima tensió tallant) són dues famílies de corbes *ortogonals entre si* que formen un angle de 45° amb les línies isostàtiques.

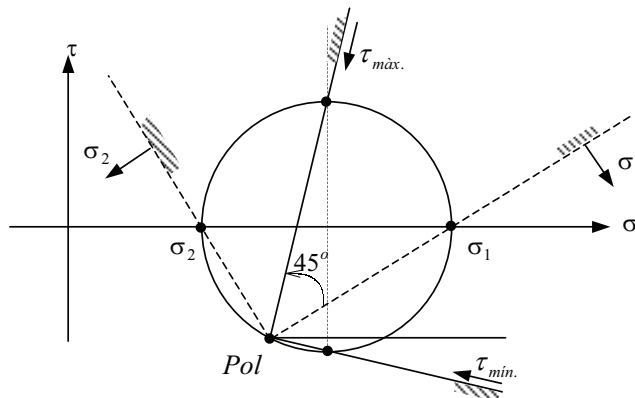


Figura 7-16 – Plans de màxima tensió tallant

7.6.4.1 Equació diferencial de les línies de màxima tensió tangencial

Segui β l'angle format per la direcció de τ_{\max} amb l'horitzontal (veure la Figura 7-17). D'acord amb l'Observació 7-5, es té:

$$\beta = \alpha - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(2\beta) = \tan\left(2\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan 2\alpha} \quad (7.45)$$

on α és l'angle format per la tensió principal σ_1 amb l'horitzontal. Per tant, considerant l'equació genèrica d'una línia de màxima tensió tangencial $y = f(x)$,

l'equació (7.45) i la relació $\tan 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$:

$$\left. \begin{aligned} \tan(2\beta) &= -\frac{1}{\tan(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} \\ \tan(\beta) &= \frac{dy}{dx} = y' \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = \frac{2 y'}{1 - (y')^2} \quad (7.46)$$

$$\Rightarrow (y')^2 - \frac{4\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} y' - 1 = 0$$

i resolent l'equació de segon grau de (7.46) en y' , s'obté l'equació diferencial de les línies de màxima tensió tallant:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equació diferencial} \\ \text{de les línies de màxima} \\ \text{tensió tallant} \end{array} \right\} \rightarrow y' = \underbrace{\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \pm \sqrt{\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right)^2 + 1}}_{\varphi(x,y)} \quad (7.47)$$

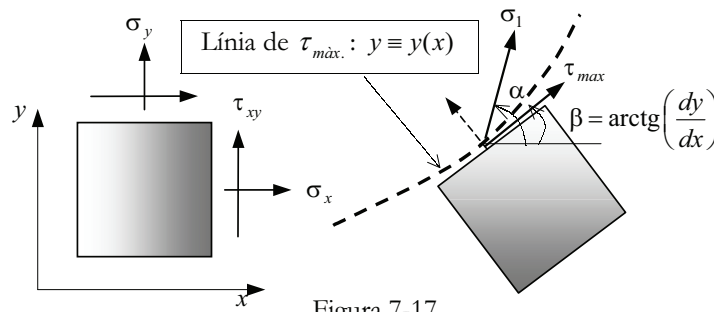


Figura 7-17

Coneguda la funció $\varphi(x,y)$ en l'equació (7.47), es pot integrar l'equació diferencial esmentada i obtenir l'equació algebraica de les dues famílies de corbes ortogonals (corresponents al doble signe en l'equació (7.47)).

8 Plasticitat

8.1 Introducció

Els models (equacions constitutives) elastoplàstics es fan servir en mecànica de medis continus per representar el comportament mecànic de materials quan se sobrepassen certs límits en els valors de les tensions (o de les deformacions) i el comportament deixa de ser representable mitjançant models més simples com són els elàstics. En aquest capítol s'estudiaran els models esmentats considerant, en tots els casos, que *les deformacions són infinitesimals*.

A grans trets, la plasticitat introdueix dues grans modificacions sobre l'elasticitat lineal estudiada en els capítols 6 i 7:

- 1) *La pèrdua de linealitat* (les tensions ja no són proporcionals a les deformacions).
- 2) L'aparició del concepte de *deformació plàstica o permanent*. Una part de la deformació que es genera durant el procés de càrrega no es recupera durant el procés de descàrrega.

NOTA

Els conceptes d'aquest apartat són un recordatori dels que s'han estudiat al capítol 4, apartats 4.4.4 a 4.4.7.

8.2 Nocions prèvies

8.2.1 Invariants tensionals

Sigui σ el tensor de tensions de Cauchy i la seva matriu de components en una base associada als eixos cartesianes $\{x, y, z\}$ (vegeu la Figura 8-1):

$$[\sigma]_{xyz} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (8.1)$$

En tractar-se d'un tensor simètric de segon ordre, diagonalitzarà en una base ortonormal i tots els seus autovalors seran nombres reals. Sigui llavors $\{x', y', z'\}$ un sistema d'eixos cartesianes associat a la base en què σ diagonalitza (autovectors de σ). La seva matriu de components en la base esmentada serà:

$$[\sigma]_{x'y'z'} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (8.2)$$

on $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, denominades *tensions principals*, són els autovalors de σ i les direccions associades als eixos $\{x', y', z'\}$ s'anomenen *direccions principals* (vegeu la Figura 8-1).

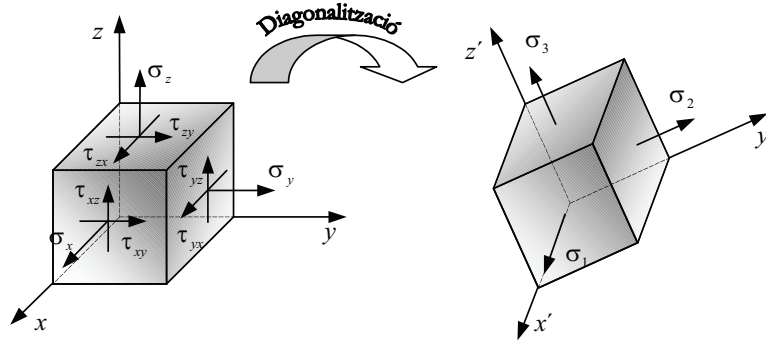


Figura 8-1 – Diagonalització del tensor de tensions

Per obtenir les tensions i les direccions principals de σ , s'ha de resoldre el corresponent problema d'autovalors i autovectors:

$$\text{Trobar } \lambda \text{ i } \mathbf{v} \text{ de forma que: } \sigma \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow [\sigma - \lambda \mathbf{1}] \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (8.3)$$

on λ correspon als autovalors i \mathbf{v} als autovectors. Condició necessària i suficient per tal que el sistema (8.3) tingui solució és que:

$$\det[\sigma - \lambda \mathbf{1}] = |\sigma - \lambda \mathbf{1}| = 0 \quad (8.4)$$

que en components resulta:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (8.5)$$

El desenvolupament algebraic de l'equació (8.5), denominada *equació característica*, correspon a una equació polinòmica de tercer grau en λ , que es pot escriure com:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 - I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (8.6)$$

on els coeficients $I_1(\sigma_{ij}), I_2(\sigma_{ij}), I_3(\sigma_{ij})$ són unes certes funcions dels components σ_{ij} del tensor σ en el sistema de coordenades $\{x, y, z\}$. Tanmateix, les solucions de l'equació (8.6), que seran funció dels coeficients d'aquesta (I_1, I_2, I_3) , són les tensions principals que, d'altra banda, són independents de quin sigui el sistema d'eixos en el qual s'hagi expressat σ . En conseqüència, els coeficients esmentats han de ser *invariants* davant qualsevol canvi de base. Per aquest motiu, els coeficients I_1, I_2 i I_3 es denominen *invariants* I o invariants fonamentals i la seva expressió (després del desenvolupament corresponent de l'equació (8.5)) resulta ser:

$$\text{Invariants } I \rightarrow \begin{cases} I_1 = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{ii} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma} - I_1^2) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\ I_3 = \det(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \end{cases} \quad (8.7)$$

Evidentment, qualsevol funció escalar dels invariants serà també un invariant i, per tant, a partir dels invariants I , definits en (8.7), es poden definir nous invariants. En particular, definirem els denominats *invariants* J :

$$\text{Invariants } J \rightarrow \begin{cases} J_1 = I_1 = \sigma_{ii} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \\ J_2 = \frac{1}{2}(I_1^2 + 2I_2) = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ji} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \\ J_3 = \frac{1}{3}(I_1^3 + 3I_1I_2 + 3I_3) = \frac{1}{3}\sigma_{ij}\sigma_{jk}\sigma_{ki} = \frac{1}{3}\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \end{cases} \quad (8.8)$$

Observació 8-1

- Observeu que si: $I_1 = 0 \Rightarrow J_i = I_i \quad i \in \{1,2,3\}$.
- Els invariants J_i , $i \in \{1,2,3\}$, es poden expressar de forma unificada i compacta mitjançant l'expressió:

$$J_i = \frac{1}{i} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}^i) \quad i \in \{1,2,3\}$$

8.2.2 Components esfèric i desviador del tensor de tensions

Donat el tensor de tensions $\boldsymbol{\sigma}$, es defineix *la tensió mitjana* σ_m com:

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_{ii}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (8.9)$$

i la *pressió mitjana* \bar{p} com:

$$\bar{p} = -\sigma_m \quad (8.10)$$

El tensor de tensions de Cauchy es pot descompondre en una part (o component) *esfèrica* $\boldsymbol{\sigma}_{esf}$ i una part (o component) *desviadora* $\boldsymbol{\sigma}'$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_{esf} + \boldsymbol{\sigma}' \quad (8.11)$$

on la part esfèrica del tensor de tensions es defineix com:

$$\sigma_{esf}^{def} := \frac{1}{3} Tr(\sigma) \mathbf{1} = \sigma_m \mathbf{1}$$

$$\sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} \quad (8.12)$$

i, de les equacions (8.11) i (8.12), la part desviadora resulta ser:

$$\sigma' = \sigma - \sigma_{esf} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_m \end{bmatrix} \quad (8.13)$$

Els invariants I i J del tensor desviador σ' , que es denominaran invariants I' i J' , resulten, després de considerar les equacions (8.7), (8.8), (8.9) i (8.13):

$$\text{Invariants } J' \rightarrow \begin{cases} J_1' = I_1' = 0 \\ J_2' = I_2' = \frac{1}{2} (\sigma' : \sigma') = \frac{1}{2} \sigma_{ij}' \sigma_{ji}' \\ J_3' = I_3' = \frac{1}{3} (\sigma_{ij}' \sigma_{jk}' \sigma_{ki}') \end{cases} \quad (8.14)$$

Observació 8-2

Es pot demostrar fàcilment que *les direccions principals de σ coincideixen amb les de σ'* , és a dir, que tots dos tensors diagonalitzen en la mateixa base. En efecte, si es treballa en la base associada a les direccions principals de σ , és a dir, la base en la qual diagonalitza σ , i atès que σ_{esf} és un tensor hidrostàtic i, per tant, és diagonal en qualsevol base, llavors σ' també diagonalitza en la mateixa base (vegeu la Figura 8-2).

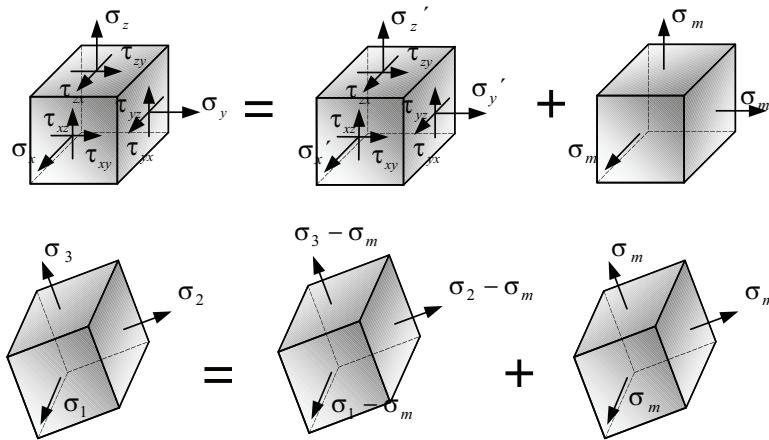


Figura 8-2. – Diagonalització dels components esfèric i desviador

Observació 8-3

Es defineix com a *tensió efectiva o tensió uniaxial equivalent* $\bar{\sigma}$ l'escalar:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}'}$$

La denominació tensió uniaxial equivalent es justifica perquè el seu valor per a un estat de tensió uniaxial coincideix amb la tensió uniaxial esmentada (vegeu l'Exemple 8-1).

Exemple 8-1 *Calculen el valor de la tensió uniaxial equivalent (o tensió efectiva) $\bar{\sigma}$ per a un estat de tensió uniaxial definit per:*

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resolució

a) *Tensió mitjana:* $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_u}{3}$

b) *Component esfèric:* $\boldsymbol{\sigma}_{\text{esf}} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_u}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_u}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_u}{3} \end{bmatrix}$

c) *Component desviador:*

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{\text{esf}} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u - \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma_u & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_u \end{bmatrix}$$

Tensió efectiva: $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma_u^2 \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right)} = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2}{3}} |\sigma_u| = |\sigma_u| \Rightarrow$

$$\boxed{\bar{\sigma} = |\sigma_u|}$$

NOTA

L'espai de tensions principals també és conegut amb el nom d'*espai de tensions de Haigh-Westergaard*.

8.3 Espai de tensions principals

Considerem un sistema d'eixos cartesianes en $\mathbb{R}^3 \{x \equiv \sigma_1, y \equiv \sigma_2, z \equiv \sigma_3\}$ de manera que a cada estat tensional, caracteritzat pels valors de les tres tensions

principals $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, li correspon un punt en l'espai esmentat al qual denominarem *espai de tensions principals* (vegeu la Figura 8-3).

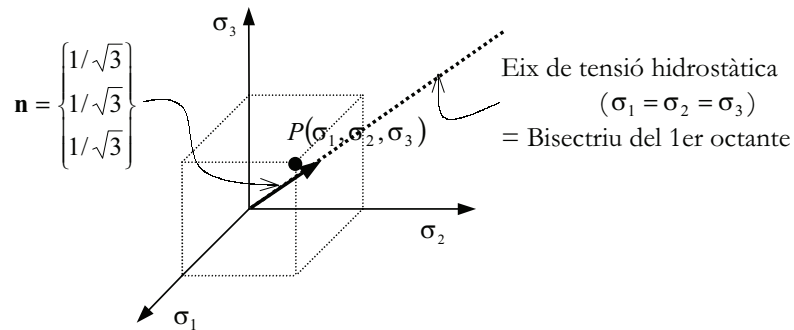


Figura 8-3 – Espai de tensions principals

Definició

Eix de tensió hidrostàtica: És el lloc geomètric dels punts de l'espai de tensions principals que verifiquen la condició $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ (vegeu la Figura 8-3). Els punts situats sobre l'eix de tensió hidrostàtica representen estats tensionals hidrostàtics (vegeu el capítol 4, apartat 4.4.5).

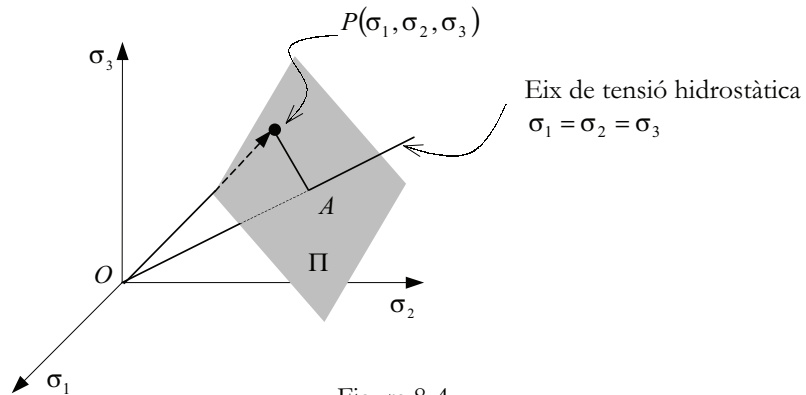


Figura 8-4

Definició

Pla octaèdric Π : Qualsevol dels plans normals a l'eix de tensió hidrostàtica (vegeu la Figura 8-4). L'equació d'un pla octaèdric és:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{constant}$$

i la normal (unitària) a aquest és:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{1, 1, 1\}^T$$

8.3.1 Tensions sigma i tau octaèdrica

Sigui P un punt de l'espai de tensions principals, de coordenades $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ i vector posició $\overline{OP} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}^T$ (vegeu la Figura 8-5). Considerem el pla octaèdric Π que passa pel punt P , i sigui A la intersecció de l'eix de tensió hidrostàtica amb aquest pla.

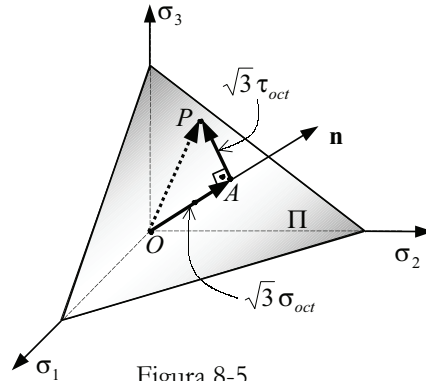


Figura 8-5

Definicions

- Tensió *sigma octaèdrica*: $|\overline{OA}| = \sqrt{3} \sigma_{oct}$
- Tensió *tau octaèdrica*: $|\overline{AP}| = \sqrt{3} \tau_{oct}$

Observació 8-4

- σ_{oct} informa de la distància entre l'origen O i el pla octaèdric que passa pel punt P . El lloc geomètric dels punts de l'espai de tensions principals amb igual σ_{oct} és el pla octaèdric que està a una distància $\sqrt{3} \sigma_{oct}$ de l'origen.
- τ_{oct} informa de la distància entre el punt P i l'eix de tensió hidrostàtica. És, doncs, una mesura de la distància que separa l'estat caracteritzat pel punt P d'un estat de tensió hidrostàtica. El lloc geomètric dels punts de l'espai de tensions principals amb igual τ_{oct} és un cilindre l'eix del qual és l'eix de tensió hidrostàtica i el radi del qual és $\sqrt{3} \tau_{oct}$.

La distància $|\overline{OA}|$ es pot calcular com la projecció del vector \overline{OP} sobre \mathbf{n} (la normal unitària al pla octaèdric):

$$\left. \begin{aligned} |\overline{OA}| &= \overline{OP} \cdot \mathbf{n} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\} \cdot \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{Bmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sqrt{3} \sigma_m \\ |\overline{OA}| &= \sqrt{3} \sigma_{oct} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (8.15)$$

$$\boxed{\sigma_{oct} = \sigma_m = \frac{I_1}{3}} \quad (8.16)$$

on s'ha tingut en compte la definició (8.9) de la tensió mitjana σ_m .

La distància $|\overline{AP}|$ es pot calcular resolent el triangle rectangle OAP de la Figura 8-5:

$$|\overline{AP}|^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \quad (8.17)$$

Mitjançant algunes operacions algebraïques, aquesta distància es pot expressar en funció del segon invariant, J_2' , del tensor de tensions desviador de l'equació (8.14) com:

$$\left. \begin{aligned} |\overline{AP}|^2 &= 2J_2' \Rightarrow |\overline{AP}| = \sqrt{2}(J_2')^{1/2} \\ |\overline{AP}| &= \sqrt{3} \tau_{oct} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} [J_2']^{1/2}} \quad (8.18)$$

Les expressions alternatives de τ_{oct} en funció del valor de J_2' en l'equació (8.14) són:

$$\begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 \right]^{1/2} \\ \tau_{oct} &= \frac{1}{3\sqrt{3}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Observació 8-5

- Si l'estat tensional $\boldsymbol{\sigma}$ és purament *esfèric*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{esf} \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_{esf} \mathbf{1} = \mathbf{0} \Leftrightarrow J_2' = 0 \Leftrightarrow \boxed{\tau_{oct} = 0}$$

(un estat esfèric queda caracteritzat per $\tau_{oct} = 0$ i, per tant, pertany a l'eix de tensió hidrostàtica, vegeu la Figura 8-5).

- Si l'estat tensional $\boldsymbol{\sigma}$ és purament *desviador*:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}' \Leftrightarrow \sigma_m = Tr(\boldsymbol{\sigma}) = Tr(\boldsymbol{\sigma}') = 0 \Leftrightarrow \boxed{\sigma_{oct} = 0}$$

(un estat desviador queda caracteritzat per $\sigma_{oct} = 0$ i pertany al pla octaèdric que passa per l'origen).

Observació 8-6

Un punt P de l'espai de tensions principals queda caracteritzat unívocament pels tres invariants $I_1 \equiv J_1, J'_2, J'_3$ (vegeu la Figura 8-6):

- I_1 (a través de $\sigma_{oct} = \frac{1}{3} I_1$) caracteritza la distància a l'origen ($= \sqrt{3} \sigma_{oct}$) del pla octaèdric Π sobre el qual està el punt (situa el punt P sobre un cert pla octaèdric).
- J'_2 caracteritza la distància del punt a l'eix de tensió hidrostàtica (situa el punt P sobre un cercle del pla octaèdric amb centre a l'eix de tensió hidrostàtica i radi $\sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{2} [J'_2]^{1/2}$).
- J'_3 caracteritza la posició del punt dins del cercle definint l'angle $\theta(J'_3)$.

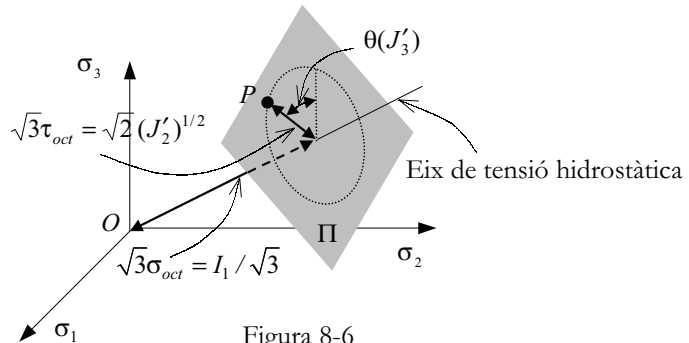


Figura 8-6

Observació 8-7

La Figura 8-7 mostra la projecció de l'espai de tensions principals sobre el pla octaèdric Π . En aquesta projecció es pot observar la divisió de l'espai de tensions principals en sis sectors, caracteritzats per les sis possibles ordenacions diferents de les tensions esmentades i separats per les projeccions dels plans bisectors $\sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_1 = \sigma_3$ i $\sigma_1 = \sigma_2$. L'elecció del criteri $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ redueix automàticament el domini de treball factible al sector ombrejat a la figura i la intersecció de qualsevol superfície, del tipus $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, amb el pla Π es redueix a una corba en el sector esmentat. Tanmateix, resulta automàtic estendre la corba als altres sectors (és a dir, dibuixar la corba que s'obindria amb la mateixa funció $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$, però considerant les diferents ordenacions de les tensions principals) sense res més que aprofitar les condicions de simetria respecte als plans bisectors. La corba resultant, per tant, presentarà tres eixos de simetria respecte a cada un dels eixos de la Figura 8-7.

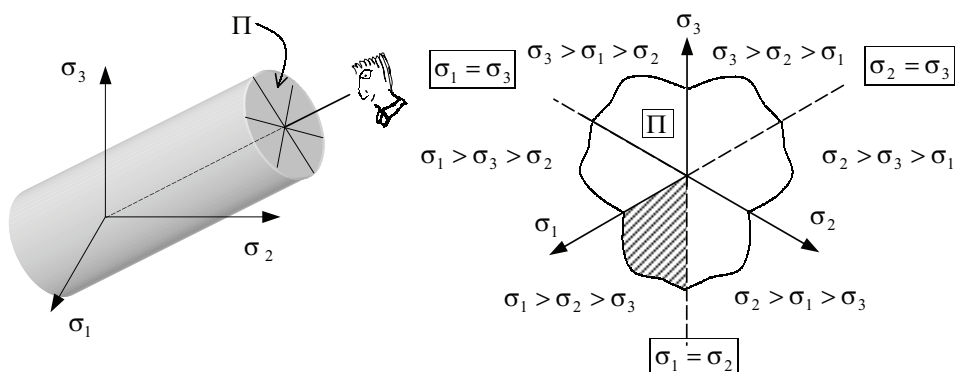


Figura 8-7 – Projectió sobre el pla octaèdric

8.4 Models reològics de fricció

Els *models reològics* són idealitzacions de models mecànics, construïts com a combinació d'*elements* simples, el comportament dels quals és fàcilment intuïble, i que permeten percebre comportaments mecànics més complexos. S'utilitzaran aquí models reològics de fricció per introduir el concepte de deformació irrecuperable o permanent i les seves conseqüències com a pas previ a l'anàlisi dels models elastoplàstics.

8.4.1 Element elàstic (element molla)

El model reològic elàstic ve definit per una molla de constant E (vegeu la Figura 8-8). El model estableix que existeix proporcionalitat entre la tensió i la deformació, tant en càrrega com en descàrrega, sent la constant E , el factor de proporcionalitat (vegeu la Figura 8-8).

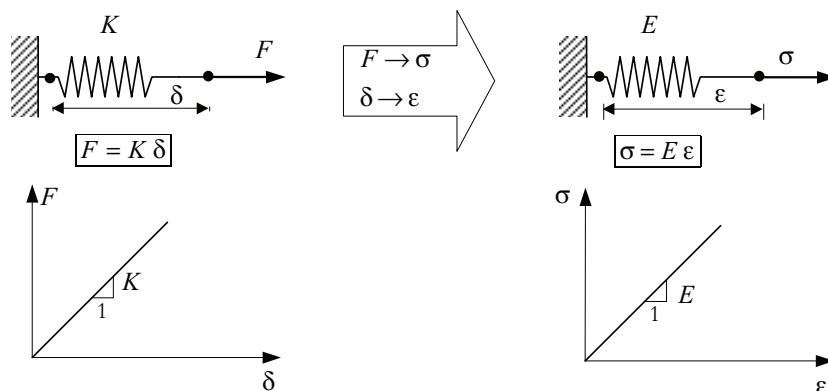


Figura 8-8 – Relació tensió-deformació per a un model elàstic

8.4.2 Element de fricció

NOTA

El model de fricció de Coulomb també rep el nom de *model de fricció seca*.

Considerem un bloc situat sobre una superfície rugosa (vegeu la Figura 8-9) i sotmès a una força de compressió N i a una força horitzontal F (positiva, cap a la dreta, i negativa cap a l'esquerra). Sigui δ el desplaçament horitzontal del bloc. El model de fricció de Coulomb estableix que el mòdul de la reacció R exercida per la superfície de contacte sobre el bloc no pot excedir d'un cert

valor límit $F_u = \mu N$, on $\mu \geq 0$ és el *coeficient de fricció* entre el bloc i la superfície. En conseqüència, mentre el mòdul de la força F sigui menor que el valor límit esmentat, el bloc no es mou. Una vegada assolit el valor límit $F_u = \mu N$, el bloc es comença a desplaçar en un estat de quasiequilibri (sense produir acceleracions) i, si es vol romandre en règim quasiestàtic, no es pot excedir aquest valor límit. Aquests conceptes es poden expressar matemàticament com:

$$\begin{aligned} |F| < \mu N &\Leftrightarrow \delta = 0 \quad (\text{No hi ha moviment}) \\ |F| = \mu N &\Leftrightarrow \delta \neq 0 \quad (\text{Hi ha moviment}) \\ |F| > \mu N &\quad (\text{Impossible}) \end{aligned} \quad (8.20)$$

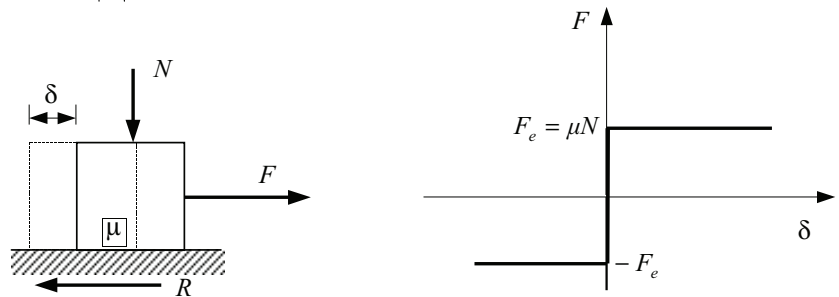


Figura 8-9 – Llei de fricció de Coulomb

El comportament del model de fricció de Coulomb, en termes de la relació força-desplaçament $F - \delta$, està representat gràficament a la Figura 8-9, tant per a valors positius de la força F (moviment cap a la dreta) com per a valors negatius (moviment cap a l'esquerra).

Per analogia amb el model mecànic de fricció, podem definir el model reològic de fricció de la Figura 8-10 on σ és la tensió (anàloga a la força F en el model de Coulomb) que actua sobre el dispositiu i ε la deformació que experimenta (anàloga al desplaçament δ). El model reològic esmentat disposa d'un dispositiu friccional caracteritzat per un valor límit σ_e (que juga el paper de μN al model de Coulomb) el valor del qual no es pot superar.

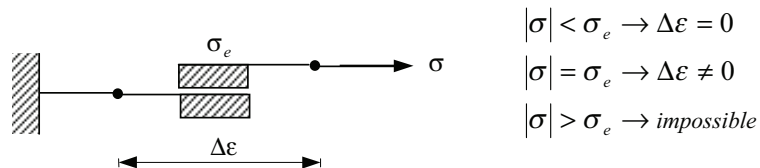


Figura 8-10 – Model reològic de fricció

A la Figura 8-11 es presenta la corba tensió-deformació corresponent al model reològic esmentat per a un cicle càrrega-descàrrega-recàrrega en aquest, que es pot descompondre en els trams següents:

- *Tram* $[0-1]$: La tensió σ augmenta (a tracció) fins assolir el valor llindar $\sigma = \sigma_e$. No es produeix deformació.

- *Tram 1–2*: Una vegada assolit el lílndar $\sigma = \sigma_e$, la tensió no pot augmentar, encara que sí mantenir-se constant, amb la qual cosa l'element de fricció *flueix* produint-se una deformació ε que creix indefinidament mentre es mantingui la tensió (procés de *càrrega*).
- *Tram 2–3*: En el punt **2** s'inverteix la tendència de la tensió que comença a disminuir ($\Delta\sigma < 0$) i s'inicia la *descàrrega* ($\sigma < \sigma_e$). Automàticament deixa de produir-se deformació $\Delta\varepsilon = 0$. Aquesta situació es pot prolongar fins que la tensió s'anul·la ($\sigma = 0$) en el punt **3**. Observeu que si el procés es deté aquí, ens trobarem amb què s'ha recuperat l'estat de tensió inicial, però no l'estat de deformació, apareixent una *deformació residual o permanent* ($\varepsilon \neq 0$) que posa en evidència que, per a aquest model, la trajectòria a la corba tensió-deformació no és la mateixa en règim de càrrega que en règim de descàrrega i (des del punt de vista termodinàmic) el caràcter irreversible del procés de deformació.
- *Tram 3–4*: Més enllà del punt **3** el signe de la tensió s'inverteix i passa a ser de compressió. Tanmateix, com que $|\sigma| < \sigma_e$, no es produeixen canvis a la deformació ($\Delta\varepsilon = 0$).
- *Tram 4–5*: En el punt **4** es compleix el criteri $|\sigma| = \sigma_e$ i el model comença novament a entrar en càrrega i a *fluir* a tensió constant $\sigma = -\sigma_e$, produint deformació negativa $\Delta\varepsilon < 0$, la qual redueix progressivament la deformació acumulada. Finalment, en el punt **5** s'ha recuperat l'estat de deformació inicial, però no el de tensió. Més enllà del punt esmentat es podria procedir a una descàrrega, amb la disminució consegüent de la tensió fins tancar el cicle en el punt **0**, o prosseguir en règim de càrrega generant, ara, deformació permanent negativa.

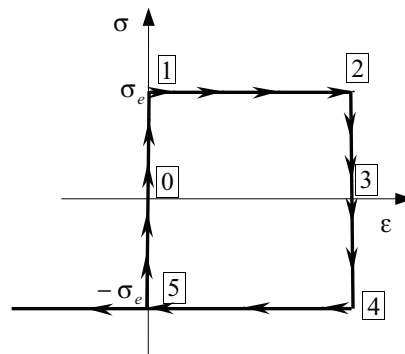


Figura 8-11 – Corba tensió-deformació en un cicle de càrrega-descàrrega-recàrrega

8.4.3 Model elàstic-friccional

Els elements reològics bàsics, elàstic i friccional es poden combinar per produir un model més complex, que denominarem *model elàstic-friccional*, mitjançant la disposició en sèrie d'un element elàstic, de paràmetre E , i d'un element de fricció, de paràmetre σ_e que denominarem *límit elàstic*, tal com es mostra en la Figura 8-12. Sigui σ la tensió que actua al model i ε la deformació total d'aquest. En estar col·locats els dos elements bàsics en sèrie, es verificarà que la tensió que actua sobre cada un és la mateixa. D'altra banda, podem descompondre la deformació total com la suma de la deformació

experimentada per l'element elàstic (ε^e) més la deformació experimentada pel dispositiu friccional (ε^f), i el mateix es podrà fer a nivell incremental:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma^e = \sigma^f \\ \varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^f = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta \varepsilon &= \Delta \varepsilon^e + \Delta \varepsilon^f \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Descomposició} \\ \rightarrow \text{additiva de} \\ \text{la deformació} \end{array} \quad (8.21)$$

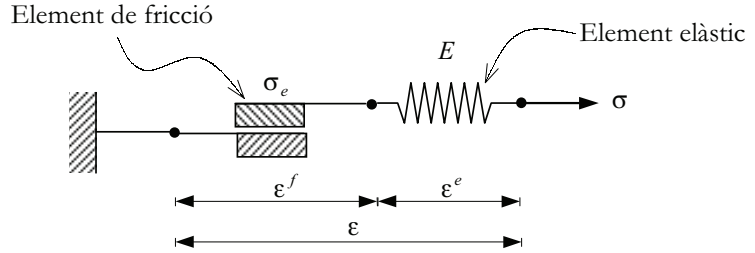


Figura 8-12 – Element elàstic-friccional

Tenint en compte el comportament tensió-deformació de cada un dels elements bàsics que componen el model reològic, per al model combinat es tindrà:

- $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e \Rightarrow \begin{cases} \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e \\ \Delta \sigma = E \Delta \varepsilon \end{cases}$

L'element de fricció no es deforma per a tensions $|\sigma| < \sigma_e$, per la qual cosa tota la deformació serà absorbida per l'element elàstic.

- $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^f \Rightarrow \begin{cases} |\sigma| = \sigma_e \\ \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^f \Rightarrow \Delta \varepsilon^e = 0 \Rightarrow \Delta \sigma = 0 \end{cases}$

Tot increment de la deformació és absorbit per l'element de fricció amb un increment de tensió nul.

- $|\sigma| > \sigma_e$

És incompatible amb les característiques de l'element de fricció.

A la Figura 8-13 es presenta la corba tensió-deformació per a un cicle càrrega-descàrrega-recàrrega amb el model elàstic-friccional, que es pot descompondre en els trams següents:

– Tram $[0-1]$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e \rightarrow$ És un tram de càrrega elàstica.

Al final d'aquest, en el punt $[1]$, es té $\varepsilon = \varepsilon^e = \frac{\sigma_e}{E}$. El valor final σ_e al final d'aquest tram elàstic justifica la seva denominació com a límit elàstic.

- Tram $\boxed{1-2}$: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \frac{\sigma_e}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^f > 0 \end{cases} \rightarrow$ És un tram de càrrega

friccional en el qual no es genera deformació en l'element elàstic (*no es genera deformació elàstica*) i tot l'increment de deformació és absorbit per l'element friccional.

- Tram $\boxed{2-3}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e \rightarrow$ És un tram de descàrrega elàstica. Al final d'aquest, en el punt $\boxed{3}$ es recupera l'estat inicial de tensió nul·la ($\sigma = 0$). En conseqüència, en el punt esmentat la deformació elàstica és $\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} = 0$ i, per tant, la deformació residual o irrecuperable és $\varepsilon = \varepsilon^f \neq 0$; és a dir, la deformació generada en l'element de fricció durant el tram de càrrega friccional $\boxed{1-2}$ no es recupera davant d'una relaxació eventual a zero de la tensió. Aquest fet permet qualificar *al component friccional de la deformació ε^f com una deformació irrecuperable o irreversible*.

- Tram $\boxed{3-4}$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^e \rightarrow$ És un tram de recàrrega elàstica similar en $\boxed{0-1}$, però amb tensió de compressió ($\sigma < 0$). Durant aquest no es modifica el component friccional de la deformació i el valor final, en el punt $\boxed{4}$, de la deformació elàstica és $\varepsilon^e = -\frac{\sigma_e}{E}$.

- Tram $\boxed{4-5}$: $|\sigma| = \sigma_e \Rightarrow \Delta \varepsilon^f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon = -\frac{\sigma_e}{E} + \varepsilon^f \\ \Delta \varepsilon = \Delta \varepsilon^f < 0 \end{cases} \rightarrow$ És un tram de recàrrega

friccional durant el qual es genera deformació friccional negativa ($\Delta \varepsilon^f < 0$), per la qual cosa el valor total de la deformació de fricció va disminuint fins anul·lar-se en el punt $\boxed{5}$

(caracteritzat per $\varepsilon = \varepsilon^e = -\frac{\sigma_e}{E}$ i $\varepsilon^f = 0$). Una descàrrega elàstica eventual en el punt esmentat determina la tornada a l'estat inicial $\boxed{0}$.

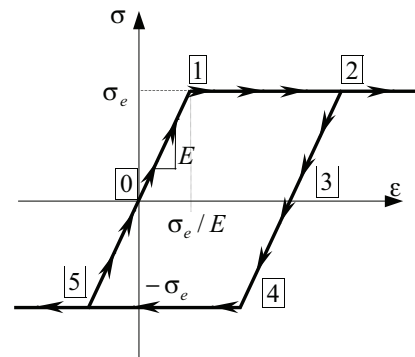


Figura 8-13 – Corba tensió-deformació d'un model elàstic-friccional

8.4.4 Model de fricció amb enduriment

Considerem el model reològic de la Figura 8-14 compost per un element elàstic (caracteritzat per un paràmetre H' , que denominarem *mòdul d'enduriment*) i un element de fricció (caracteritzat pel *límit elàstic* σ_e) disposats en paral·lel. La disposició en paral·lel motiva que tots dos elements reològics comparteixin la

deformació, mentre que la tensió total al model serà igual a la suma de la tensió sobre l'element de fricció ($\sigma^{(1)}$) més la tensió que passa per l'element elàstic ($\sigma^{(2)}$):

$$\begin{cases} \sigma = \sigma^{(1)} + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} + \Delta\sigma^{(2)} \\ \varepsilon = \varepsilon^e = \varepsilon^f \end{cases} \quad (8.22)$$

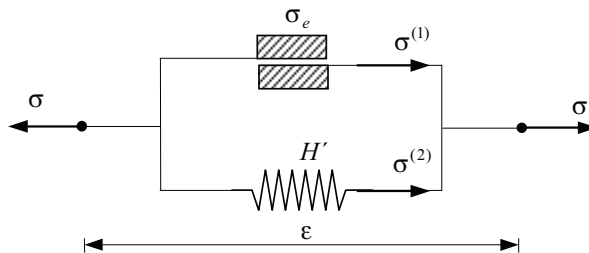


Figura 8-14 – Model de fricció amb enduriment

Analitzant per separat el comportament de cada element es té:

a) *Element de fricció:*

$$\begin{cases} |\sigma^{(1)}| < \sigma_e & \Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon = 0 \\ |\sigma^{(1)}| = \sigma_e & \Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon \neq 0 \\ |\sigma^{(1)}| > \sigma_e & \text{impossible} \end{cases} \quad (8.23)$$

b) *Element elàstic:*

$$\begin{cases} \sigma^{(2)} = H'\varepsilon^e = H'\varepsilon \\ \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon^e = H'\Delta\varepsilon \end{cases} \quad (8.24)$$

c) Combinant les equacions (8.23) i (8.24) s'arriba a:

$$|\sigma^{(1)}| = |\sigma - \underbrace{\sigma^{(2)}}_{H'\varepsilon}| = |\sigma - H'\varepsilon| \quad (8.25)$$

D'acord amb les equacions (8.23) i (8.24) es poden establir les següents situacions per al model reològic:

$$\bullet \quad |\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Leftrightarrow |\sigma - H'\varepsilon| < \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \Delta\varepsilon^f = \Delta\varepsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\varepsilon^e = H'\Delta\varepsilon = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(1)} \\ \Delta\varepsilon = 0 \end{cases}$$

Tota la tensió passa pel dispositiu friccional i la deformació és nul·la.

$$\bullet \quad |\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Leftrightarrow |\sigma - H'\varepsilon| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} |\sigma^{(1)}| = \sigma_e \\ |\sigma^{(2)}| = |\sigma - \sigma^{(1)}| \end{cases} \Rightarrow \Delta\sigma^{(2)} = \Delta\sigma = H'\Delta\varepsilon$$

Tot increment de tensió és absorbit en la seva totalitat per l'element elàstic.

A la figura 8-15 es presenta la corba tensió-deformació per a un cicle càrrega-descàrrega-recàrrega amb el model proposat i descomposta en els trams següents:

- Tram $[0-1]$: $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\epsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(2)} = E\Delta\epsilon = 0 \\ \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \end{cases} \rightarrow$ És un tram

caracteritzat perquè tota la tensió és absorbida per l'element de fricció. Al final d'aquest, en el punt $[1]$, es té $\epsilon = 0$ i $\sigma = \sigma_e$. El tram es pot caracteritzar per la condició $|\sigma - H'\epsilon| < \sigma_e$.

- Tram $[1-2]$: $|\sigma^{(1)}| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = \sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\epsilon \end{cases} \rightarrow$ És un tram de càrrega en

el qual tot l'increment de tensió és absorbit per l'element elàstic. Globalment el model augmenta la seva capacitat de resistir la tensió (i es diu que el model s'endureix) proporcionalment a l'augment de deformació, sent el factor de proporcionalitat el mòdul d'enduriment H' . El tram es pot caracteritzar per la condició $|\sigma - H'\epsilon| = \sigma_e$.

- Tram $[2-3]$: $|\sigma^{(1)}| < \sigma_e \Rightarrow \Delta\epsilon = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta\sigma^{(1)} = \Delta\sigma \\ \Delta\sigma^{(2)} = 0 \end{cases} \rightarrow$ És un tram en el qual la

tensió en l'element friccional disminueix, amb un increment de deformació nul i mantenint-se constant la tensió en l'element elàstic. Aquest estat es pot prosseguir fins a invertir-se totalment la tensió en l'element friccional. Així, en el punt $[3]$ es té $\sigma^{(1)} = -\sigma_e$. El tram es pot caracteritzar per la condició $|\sigma - H'\epsilon| < \sigma_e$.

- Tram $[3-4]$: $\left| \frac{\sigma^{(1)}}{-\sigma_e} \right| = \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \sigma = -\sigma_e + \sigma^{(2)} \\ \Delta\sigma = \Delta\sigma^{(2)} = H'\Delta\epsilon \end{cases} \rightarrow$ La situació és simètrica

respecte al tram $[1-2]$ amb l'element elàstic disminuint la tensió que suporta, fins anul·lar-se en el punt $[3]$, on $\sigma^{(1)} = -\sigma_e$ i $\sigma^{(2)} = 0$. El tram es pot caracteritzar per la condició $|\sigma - H'\epsilon| = \sigma_e$. Més enllà d'aquest punt es pot relaxar la tensió en l'element de fricció fins a arribar a l'estat original $[0]$.

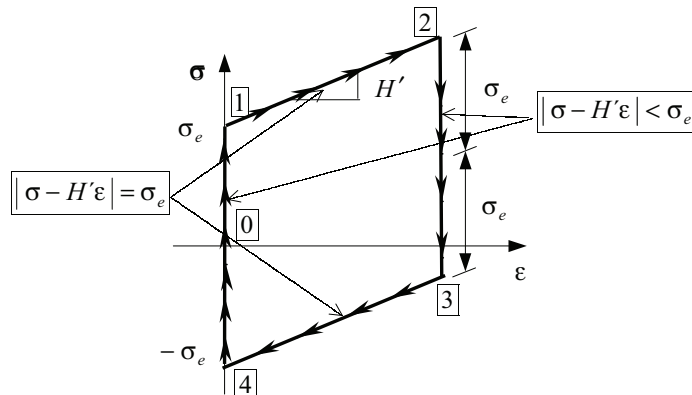


Figura 8-15 – Corba tensió-deformació d'un model de fricció amb enduriment

8.4.5 Model elàstic – friccional amb enduriment

Combinant ara un element elàstic, de mòdul elàstic E , en sèrie amb el model friccional, amb enduriment H' i límit elàstic σ_e , de l'apartat 8.4.4, s'arriba al model elàstic-fricció amb enduriment de la Figura 8-16.

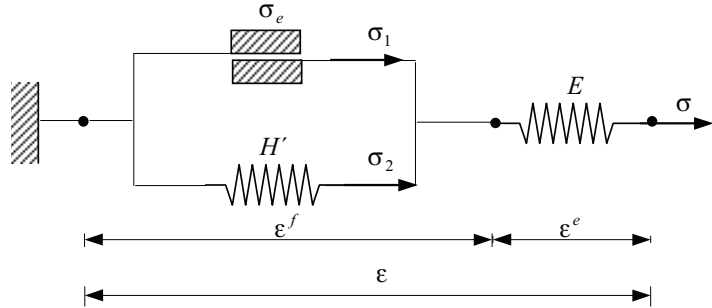


Figura 8-16 – Model elàstic-fricció amb enduriment.

De les equacions d'equilibri de tensions i de compatibilitat de deformacions al model (vegeu la Figura 8-16), tindrem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^f \\ \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^f \end{array} \right. \rightarrow \begin{array}{l} \text{Descomposició} \\ \text{additiva de la} \\ \text{deformació} \end{array} \quad (8.26)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma = \sigma^e = \sigma^f \\ \Delta \sigma = \Delta \sigma^e = \Delta \sigma^f \end{array} \right.$$

on σ^e i σ^f representen, respectivament, les tensions suportades per l'element elàstic i el model de fricció amb enduriment. Combinant ara el comportament d'un element elàstic (vegeu la Figura 8-8) amb el del model de fricció amb enduriment de la Figura 8-14, es té per al model reològic proposat:

$$\bullet \quad \left| \sigma - H' \epsilon_f \right| < \sigma_e \Rightarrow \begin{cases} \Delta \epsilon^f = 0 \\ \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e \end{cases} \Rightarrow \Delta \sigma = E \Delta \epsilon$$

L'element de fricció amb enduriment no es deforma i l'increment de deformació $\Delta \epsilon$ és absorbit en la seva totalitat per l'element elàstic. És el cas que denominarem *procés elàstic*.

$$\bullet \quad \left| \sigma - H' \epsilon_f \right| = \sigma_e$$

$$a) \quad \left| \sigma - H' \epsilon_f \right| = \sigma_e \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma > 0 ; \Delta \sigma > 0 \\ \text{ó} \\ \sigma < 0 ; \Delta \sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \sigma = \Delta \sigma^f = H' \Delta \epsilon^f \\ \Delta \sigma = \Delta \sigma^e = E \Delta \epsilon^e \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta \epsilon = \Delta \epsilon^e + \Delta \epsilon^f = \frac{1}{E} \Delta \sigma + \frac{1}{H'} \Delta \sigma = \frac{E + H'}{EH'} \Delta \sigma \Rightarrow \begin{cases} \Delta \sigma = E^{ef} \Delta \epsilon \\ E^{ef} = E \frac{H'}{E + H'} \end{cases}$$

L'increment de deformació és absorbit pels dos elements del model (el friccional-endurable i l'elàstic). La relació entre l'increment de tensió

$\Delta\sigma$ i l'increment de deformació $\Delta\epsilon$ ve donada pel *mòdul de deformació elàstic-friccional* E^{ef} . Es tracta d'un cas que denominarem *procés de càrrega inelàstica*.

$$b) \quad \boxed{\sigma \cdot \Delta\sigma < 0} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma > 0 ; \Delta\sigma < 0 \\ \text{ó} \\ \sigma < 0 ; \Delta\sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta\epsilon^f = 0 \Rightarrow \Delta\epsilon = \Delta\epsilon^e \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E \Delta\epsilon}$$

Tot l'increment de deformació $\Delta\epsilon$ és absorbit per l'element elàstic. Es tracta d'un cas que denominarem *procés de descàrrega elàstica*.

A la figura 8-17 es presenta la corba tensió deformació en la qual es poden distingir els trams següents:

- Trams $\boxed{0-1}$ i $\boxed{2-3}$: $|\sigma - H'\epsilon_f| < \sigma_e \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E \Delta\epsilon}$. Corresponen a *processos elàstics*.
- Trams $\boxed{1-2}$ i $\boxed{3-4}$: $\begin{cases} |\sigma - H'\epsilon_f| = \sigma_e \\ \sigma \Delta\sigma > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E^{ef} \Delta\epsilon}$. Corresponen a *processos de càrrega inelàstica*.
- Punt $\boxed{2}$: $\begin{cases} |\sigma - H'\epsilon_f| = \sigma_e \\ \sigma \Delta\sigma < 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\Delta\sigma = E \Delta\epsilon}$. Correspon a un *procés de descàrrega elàstica*.

Noteu que si $H' = 0$, llavors $E^{ef} = 0$ i es recupera el model elàstic-friccional de la Figura 8-13.

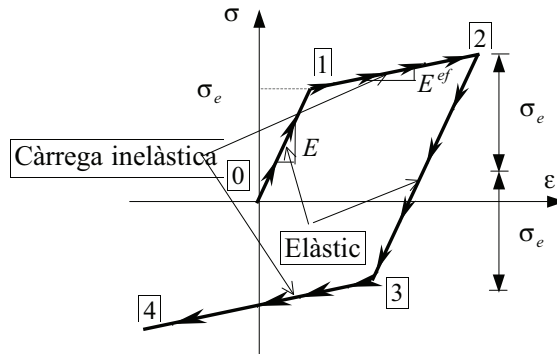


Figura 8-17 – Corba tensió-deformació d'un model elàstic-friccional amb enduriment

Per a tensions superiors a σ_e , el comportament deixa de ser elàstic i part de la deformació no es recupera davant d'una reducció eventual a zero de la tensió (punt [3](#)), i apareix una deformació romanent denominada *deformació plàstica* ε^p . Tanmateix, durant la branca de descàrrega [2-3](#) el comportament torna a ser, almenys de forma aproximada, incrementalment elàstic ($\Delta\sigma = E \Delta\varepsilon$). El mateix passa en la recàrrega [3-2](#) posterior i es produeix un comportament incrementalment elàstic, fins que la tensió assoleix, en el punt [2](#), el màxim valor que havia assolit durant el procés de càrrega. A partir d'aquest punt el comportament deixa de ser de nou incrementalment elàstic (com si el material *recordés* la màxima tensió a què havia estat sotmès prèviament). Un següent cicle càrrega-descàrrega-recàrrega [2-4-5-4](#) posa novament de manifest que durant el tram [2-4](#) s'ha generat més deformació plàstica, que apareix en

forma de deformació permanent en el punt [5], i també més *deformació elàstica* ε^e , entesa com aquella part de la deformació que sí que es recupera durant el tram de descàrrega [4–5].

8.5.1 Efecte Bauschinger

Considerem una proveta d'un material verge (que no ha sofert prèviament estats de deformació inelàstics) sotmesa a un assaig de *tracció* uniaxial i una altra proveta del mateix material verge sotmesa a un assaig de *compressió* uniaxial. Per a certs materials (denominats isoresistents) les respostes que s'obtenen en tots dos assajos, en termes de la corba tensió-deformació $\sigma - \varepsilon$ de la Figura 8-20, són simètriques respecte a l'origen. És a dir, que en l'assaig a tracció la resposta és elàstica fins a un valor de $\sigma = \sigma_e$ (*límit elàstic a tracció*) i en l'assaig a compressió la resposta és també elàstica fins a un valor de $\sigma = -\sigma_e$ (*límit elàstic a compressió*), sent la resta de les dues corbes (per a un suposat règim de càrrega monòton) també simètriques. Direm en aquest cas que la corba tensió-deformació del material verge és simètrica a tracció i compressió.

NOTA

Aquest procediment es coneix com *estirament en fred* i té com a finalitat obtenir un límit elàstic aparent del material superior al del material verge $\sigma_f > \sigma_e$.

Suposem ara que realitzem un assaig de compressió sobre una proveta que ha estat *sotmesa prèviament a una història de deformacions plàstiques*, per exemple a un cicle de càrrega-descàrrega a tracció com el [0–1–2–3] en la Figura 8-19 (estirament en fred), i sigui $\sigma_f > \sigma_e$ la màxima tensió a què ha estat sotmès el material durant el procés de càrrega. Un hipotètic comportament *simètric* portaria a fer que el material tingués ara un comportament elàstic en el rang de tensions $[-\sigma_f, \sigma_f]$. Tanmateix, en certs casos, el comportament elàstic a compressió acaba molt abans (vegeu la Figura 8-20). Aquest és l'efecte conegut com *efecte Bauschinger* o *enduriment cinemàtic*. Observeu que la corba tensió-deformació del model elàstic-friccional de la Figura 8-17 presenta aquest tipus d'enduriment.

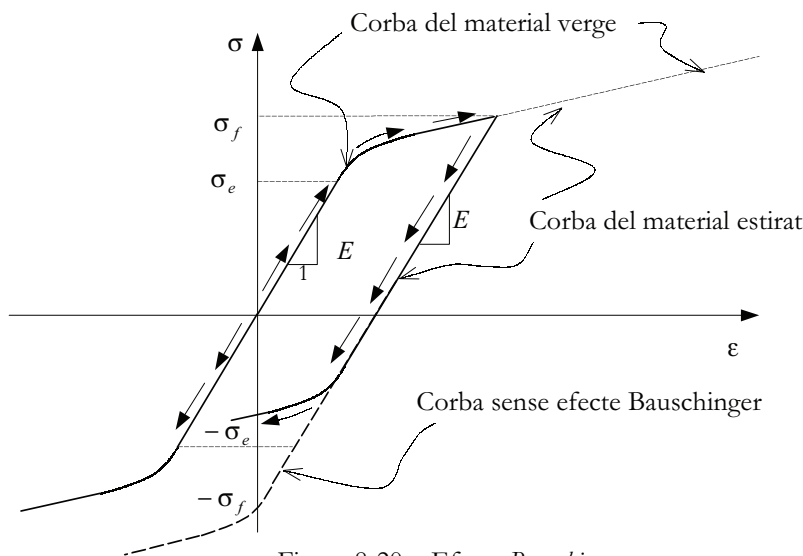


Figura 8-20 – Efecte Bauschinger

Observació 8-8

Atès el comportament fenomenològic observat en la Figura 8-19 i en la Figura 8-20, el comportament elastoplàstic es caracteritza pels fets següents:

- 1) A diferència del cas elàstic, no hi ha unicitat en la relació tensió-deformació. Un mateix valor de la deformació pot correspondre a infinits valors de la tensió i viceversa. El valor de la tensió depèn, a més de la deformació, de la història de càrrega.
- 2) No hi ha una relació lineal entre la tensió i la deformació. Pel cap alt, aquesta linealitat pot ser incremental en certs trams del procés de deformació.
- 3) Es produeixen deformacions irrecuperables o irreversibles en un cicle càrrega-descàrrega.

8.6 Teoria incremental de la plasticitat en una dimensió

NOTA

Fins a cert punt, els models esmentats es poden inspirar, tot i que amb certes limitacions, en models reològics del tipus elàstic-friccional com els presentats a l'apartat 8.4.

El comportament elastoplàstic analitzat en l'apartat 8.5 es pot modelar fent servir models matemàtics de certa complexitat. Una de les aproximacions més populars la constitueix la denominada teoria incremental de la plasticitat. Per al cas d'una dimensió es pretén, en essència, aproximar un comportament tensió-deformació com el de la Figura 8-19 mitjançant aproximacions a trossos per mitjà de branques elàstiques i inelàstiques com les de la Figura 8-21. La generalització a diverses dimensions requereix la introducció de conceptes més abstractes.

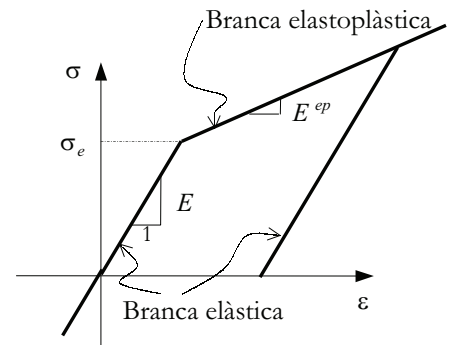


Figura 8-21 – Corba uniaxial tensió-deformació per a un model elastoplàstic

8.6.1 Descomposició additiva de la deformació. Variable d'enduriment

Es descompon la deformació total ε en la suma d'una deformació elàstica ε^e (o deformació recuperable), que es regeix per la llei de Hooke, i una deformació plàstica ε^p (o deformació irrecuperable):

$$\begin{array}{l} \text{Descomposició additiva} \\ \text{de la deformació} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \\ d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E} \end{cases} \quad (8.27)$$

on E és el mòdul elàstic. Es defineix, a més, la variable d'enduriment $\alpha(\sigma, \varepsilon^p)$ mitjançant l'equació d'evolució:

$$\text{Variable d'enduriment } \alpha \rightarrow \begin{cases} d\alpha = \text{sign}(\sigma) d\varepsilon^p \\ d\alpha \geq 0 \\ \alpha|_{\varepsilon^p=0} = 0 \end{cases} \quad (8.28)$$

NOTA

S'utilitza aquí la funció signe definida mitjançant:
 $x \geq 0 \Leftrightarrow \text{sign}(x) = +1$
 $x < 0 \Leftrightarrow \text{sign}(x) = -1$

Observació 8-9

Observeu que la variable d'enduriment α és sempre positiva, d'acord amb la seva definició en l'equació (8.28) i que, prenent mòduls en l'expressió $d\alpha = \text{sign}(\sigma) d\varepsilon^p$, s'arriba a:

$$d\alpha = |d\alpha| = \underbrace{|\text{sign}(\sigma)|}_{=1} |d\varepsilon^p| \Rightarrow d\alpha = |d\varepsilon^p|$$

Així doncs, per a un procés monòton creixent de la deformació plàstica les dues variables coincideixen:

$$d\varepsilon^p \geq 0 \Rightarrow \alpha = \int_0^{\varepsilon^p} |d\varepsilon^p| = \int_0^{\varepsilon^p} d\varepsilon^p = \varepsilon^p$$

Tanmateix, si el procés no és monòton creixent, la deformació plàstica pot disminuir i el seu valor ja no coincideix amb el de la variable d'enduriment α .

8.6.2 Domini elàstic. Funció de fluència. Superfície de fluència

Es defineix com a *domini elàstic en l'espai de tensions* l'interior del domini tancat per la superfície $F(\sigma, \alpha) = 0$:

$$\text{Domini elàstic} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) < 0\} \quad (8.29)$$

on la funció $F(\sigma, \alpha): \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ es denomina *funció de fluència plàstica*.

Es defineix com a *domini elàstic inicial* \mathbb{E}_σ^0 el domini elàstic corresponent a una deformació plàstica nul·la ($\varepsilon^p = \alpha = 0$):

$$\text{Domini elàstic inicial} \rightarrow \mathbb{E}_\sigma^0 := \{\sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, 0) < 0\} \quad (8.30)$$

Un requeriment addicional al domini elàstic inicial és que contingui a l'estat de tensió nul·la:

$$0 \in \mathbb{E}_\sigma^0 \Rightarrow F(0,0) < 0 \quad (8.31)$$

i això s'aconsegueix definint la funció de fluència plàstica mitjançant:

$$\text{Funció de fluència plàstica} \rightarrow F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \quad (8.32)$$

on $\sigma_f(\alpha) > 0$ és la denominada *tensió de fluència*. El valor inicial (per a $\alpha = 0$) de la tensió de fluència és el límit elàstic σ_e (vegeu la Figura 8-22). La funció $\sigma_f(\alpha): \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ es denomina *lleï d'enduriment*.

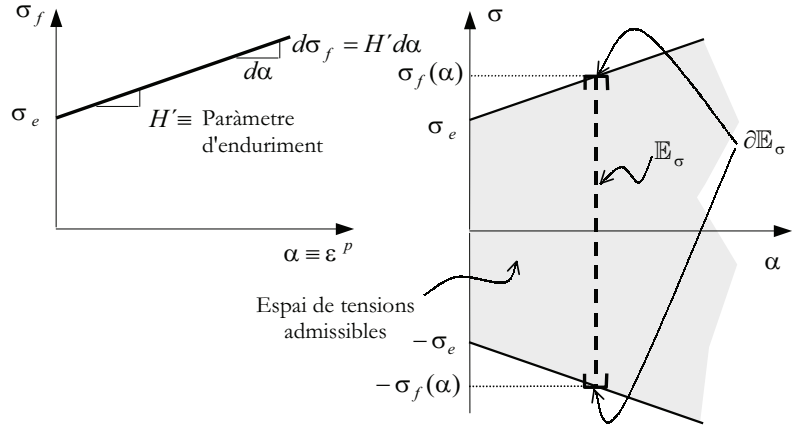


Figura 8-22 – Llei d'enduriment i espai de tensions admissibles

Es defineix la *superfície de fluència* com el contorn del domini elàstic:

$$\text{Superfície de fluència} \rightarrow \partial \mathbb{E}_\sigma := \{ \sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \} \quad (8.33)$$

El domini elàstic \mathbb{E}_σ juntament amb el seu contorn $\partial \mathbb{E}_\sigma$ determinen l'espai (domini) de tensions admissibles $\bar{\mathbb{E}}_\sigma$:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Espai de} \\ \text{tensions} \\ \text{admissibles} \end{array} \right\} \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial \mathbb{E}_\sigma = \{ \sigma \in \mathbb{R} \mid F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) \leq 0 \} \quad (8.34)$$

i es *postula* que tot estat tensional factible (admissible) ha de pertànyer a l'espai de tensions admissibles $\bar{\mathbb{E}}_\sigma$. D'acord amb les definicions del domini elàstic en (8.29), de la superfície de fluència (8.33) i de l'espai de tensions admissibles (8.34), es pot establir el següent:

$$\begin{array}{l} F(\sigma, \alpha) < 0 \Leftrightarrow |\sigma| < \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ en el domini elàstic} \\ (\sigma \in \mathbb{E}_\sigma) \end{array} \right. \\ F(\sigma, \alpha) = 0 \Leftrightarrow |\sigma| = \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sigma \text{ en la superf. de fluència} \\ (\sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma) \end{array} \right. \\ F(\sigma, \alpha) > 0 \Leftrightarrow |\sigma| > \sigma_f(\alpha) \Leftrightarrow \text{estat tensional no admissible} \end{array} \quad (8.35)$$

Observació 8-10

Observeu en l'equació (8.34) la dependència de l'espai de tensions admissibles amb la variable d'enduriment α . El domini admissible evoluciona amb la tensió de fluència $\sigma_f(\alpha)$ de la forma:

$$\bar{\mathbb{E}}_\sigma \equiv [-\sigma_f(\alpha), \sigma_f(\alpha)] \text{ (vegeu la Figura 8-22).}$$

8.6.3 Equació constitutiva

Per caracteritzar la resposta del material es defineixen les situacions següents:

- *Règim elàstic:*

$$\sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow \boxed{d\sigma = E d\epsilon} \quad (8.36)$$

- *Règim elastoplàstic en descàrrega:*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma, \alpha) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d\sigma = E d\epsilon} \quad (8.37)$$

- *Règim elastoplàstic en càrrega plàstica:*

$$\left. \begin{array}{l} \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma, \alpha) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{d\sigma = E^{ep} d\epsilon} \quad (8.38)$$

on E^{ep} és el denominat *mòdul de deformació elastoplàstica*.

Observació 8-11

La situació $\sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma$ i $dF(\sigma, \alpha) > 0$ no es pot donar, ja que si $\sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ (de l'equació (8.33)) $F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0$.

Si, a més, $dF(\sigma, \alpha) > 0 \Rightarrow$

$$F(\sigma + d\sigma, \alpha + d\alpha) = \underbrace{F(\sigma, \alpha)}_{=0} + \underbrace{dF(\sigma, \alpha)}_{>0} > 0$$

i, d'acord amb l'equació (8.35) l'estat tensional $\sigma + d\sigma$ seria no admissible.

8.6.4 Llei d'enduriment. Paràmetre d'enduriment

La llei d'enduriment proporciona l'evolució de la tensió de fluència plàstica $\sigma_f(\alpha)$ amb el paràmetre d'enduriment α (vegeu la Figura 8-22). Encara que la llei d'enduriment esmentada pot ser més general, és freqüent (i moltes vegades suficient) considerar una llei d'enduriment *lineal* del tipus:

$$\sigma_f = \sigma_e + H' \alpha \Rightarrow \boxed{d\sigma_f(\alpha) = H' d\alpha} \quad (8.39)$$

on H' rep el nom de *paràmetre d'enduriment*.

8.6.5 Mòdul de deformació elasto-plàstic

El valor del mòdul de deformació elasto-plàstic E^{ep} de l'equació (8.38) es pot calcular com segueix. Considerant el règim elasto-plàstic en càrrega plàstica, de l'equació (8.38):

NOTA

S'utilitza aquí la propietat:

$$\frac{d|x|}{dx} = \text{sign}(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma &\Rightarrow F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \\ dF(\sigma, \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (8.40)$$

$$d|\sigma| - d\sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{sign}(\sigma) d\sigma - H' d\alpha = 0$$

on s'ha tingut en compte l'equació (8.39). Considerant ara l'equació (8.28) ($d\alpha = \text{sign}(\sigma) d\epsilon^p$) i substituint en l'equació (8.40):

$$\text{sign}(\sigma) d\sigma - H' \text{sign}(\sigma) d\epsilon^p = 0 \Rightarrow \quad \boxed{d\epsilon^p = \frac{1}{H'} d\sigma} \quad (8.41)$$

Considerant ara la descomposició additiva de la deformació (8.27) i l'equació (8.41):

$$\left. \begin{aligned} d\epsilon &= d\epsilon^e + d\epsilon^p \\ d\epsilon^e &= \frac{1}{E} d\sigma \\ d\epsilon^p &= \frac{1}{H'} d\sigma \end{aligned} \right\} \Rightarrow d\epsilon = \frac{1}{E} d\sigma + \frac{1}{H'} d\sigma = \left[\frac{1}{E} + \frac{1}{H'} \right] d\sigma \Rightarrow \quad (8.42)$$

$$d\sigma = \frac{1}{\frac{1}{E} + \frac{1}{H'}} d\epsilon \Rightarrow \quad \boxed{\begin{cases} d\sigma = E^{ep} d\epsilon \\ E^{ep} = E \frac{H'}{E + H'} \end{cases}}$$

8.6.6 Corba tensió-deformació uniaxial

Amb l'equació constitutiva definida per les equacions (8.36) a (8.38), podem obtenir la corba tensió-deformació corresponent per a un procés uniaxial de càrrega-descàrrega-recàrrega (vegeu la Figura 8.22) en el qual podem observar els trams següents:

- Tram $[0-1]$: $|\sigma| < \sigma_e \Rightarrow \sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ Règim elàstic. D'acord amb l'equació (8.36), $d\sigma = E d\epsilon$ i el comportament és elàstic-lineal definint una branca elàstica del diagrama tensió-deformació.
- Tram $[1-2-4]$: $\left. \begin{aligned} F(\sigma, \alpha) &\equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \\ dF(\sigma, \alpha) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ Règim elasto-plàstic en càrrega plàstica. D'acord amb l'equació (8.38), $d\sigma = E^{ep} d\epsilon$ definint una branca elasto-plàstica.
- Tram $[2-3-2]$: $F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) < 0 \Rightarrow \sigma \in \mathbb{E}_\sigma \Rightarrow$ Règim elàstic.

D'acord amb l'equació (8.36), $d\sigma = E d\varepsilon$ i el comportament és elàstic-lineal definint una branca elàstica.

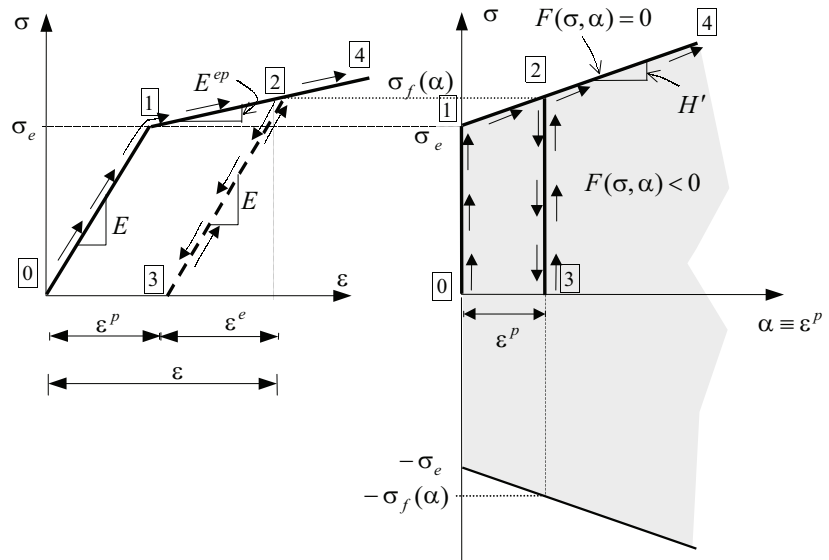


Figura 8-23 – Diagrama tensió-deformació uniaxial corresponent a la teoria incremental de la plasticitat

Observació 8-12

En el punt [2] de la Figura 8-23 es poden diferenciar els dos processos següents:

$$\begin{cases} F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \rightarrow \text{Descàrrega elàstica per la} \\ dF(\sigma, \alpha) < 0 \Rightarrow \\ \text{branca [2-3].} \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(\sigma, \alpha) \equiv |\sigma| - \sigma_f(\alpha) = 0 \Rightarrow \sigma \in \partial \mathbb{E}_\sigma \rightarrow \text{Càrrega plàstica per la} \\ dF(\sigma, \alpha) = 0 \\ \text{branca [2-4].} \end{cases}$$

Observació 8-13

Observeu que només es genera deformació plàstica durant el procés de càrrega plàstica sobre la branca elastoplàstica (vegeu la Figura 8-24).

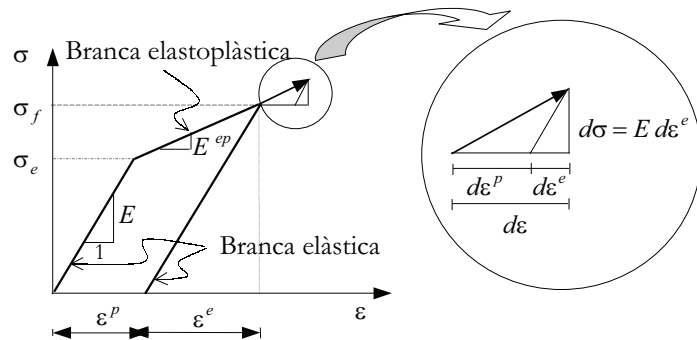


Figura 8-24 – Generació de deformació plàstica a la branca elastoplàstica

Observació 8-14

Observeu la similitud del diagrama tensió-deformació de la Figura 8-23 amb l'obtingut amb el model reològic elàstic-friccional amb enduriment a l'apartat 8.4.5 (Figura 8-17). La deformació de fricció ε^f en el model esmentat és equivalent a la deformació plàstica ε^p en la teoria incremental de la plasticitat.

NOTA

El cas de plasticitat amb ablaniment per deformació presenta una problemàtica específica, respecte a la unitat de la solució del problema elastoplàstic, que queda fora de l'àmbit d'aquest text.

Observació 8-15

El paràmetre d'enduriment H' juga un paper fonamental en la definició del pendent E^{ep} de la branca elastoplàstica. D'acord amb l'equació (8.42):

$$E^{ep} = E \frac{H'}{E + H'}$$

i, en funció del valor de H' , es poden definir les situacions següents (vegeu la Figura 8-25):

$H' > 0 \Rightarrow E^{ep} > 0 \rightarrow$ Plasticitat amb enduriment per deformació. El cas límit $H' = \infty \Rightarrow E^{ep} = E$ recobra el comportament elàstic lineal.

$H' = 0 \Rightarrow E^{ep} = 0 \rightarrow$ Plasticitat perfecta.

$H' < 0 \Rightarrow E^{ep} < 0 \rightarrow$ Plasticitat amb ablaniment per deformació. El cas límit es troba a $H' = -E \Rightarrow E^{ep} = -\infty$.

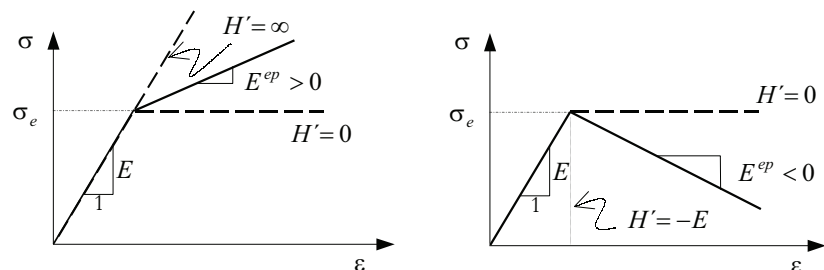


Figura 8-25

8.7 Plasticitat en tres dimensions

La teoria incremental de la plasticitat, plantejada en una dimensió a l'apartat 8.6, es pot generalitzar al cas d'un estat tensional multiaxial (tres dimensions) utilitzant els mateixos ingredients, és a dir:

1. Descomposició additiva de la deformació

$$\begin{array}{l} \text{Descomposició additiva} \\ \text{de la deformació} \end{array} \rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \\ \boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p \\ d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbb{C}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} \end{cases} \quad (8.43)$$

on \mathbb{C}^{-1} és ara el tensor de propietats elàstiques definit en el capítol 6.

2. Variable d'enduriment α i regla de flux (equacions d'evolució)

$$\text{Regla de flux} \rightarrow \begin{cases} d\boldsymbol{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ d\alpha = \lambda \quad \alpha \in [0, \infty) \end{cases} \quad (8.44)$$

on λ rep el nom de *multiplicador plàstic* i $G(\boldsymbol{\sigma}, \alpha)$ el de *funció de potencial plàstic*.

3. Funció de fluència. Domini elàstic i superfície de fluència

$$\begin{array}{ll} \text{Funció de fluència} & \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_f(\alpha) \\ \text{plàstica} & \rightarrow \sigma_f(\alpha) = \sigma_e + H' \alpha \quad (\text{lleï d'enduriment}) \\ \text{Domini elàstic} & \rightarrow \mathbb{E}_\sigma := \{ \boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0 \} \\ \text{Domini elàstic inicial} & \rightarrow \mathbb{E}_\sigma^0 := \{ \boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, 0) < 0 \} \\ \text{Superfície de fluència} & \rightarrow \partial \mathbb{E}_\sigma := \{ \boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \} \\ \text{Espai de tensions} & \rightarrow \bar{\mathbb{E}}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma \cup \partial \mathbb{E}_\sigma = \{ \boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0 \} \\ \text{admissibles} & \end{array} \quad (8.45)$$

on $\phi(\boldsymbol{\sigma}) \geq 0$ rep el nom de *tensió uniaxial equivalent*, σ_e és el límit elàstic obtingut en un assaig uniaxial del material (una propietat d'aquest) i $\sigma_f(\alpha)$ és la tensió de fluència. El paràmetre d'enduriment H' juga el mateix paper que en el cas uniaxial i determina l'expansió o contracció del domini elàstic \mathbb{E}_σ , a l'espai de tensions, a mesura que creix α . Per tant:

$$\begin{array}{l} \bullet H' > 0 \Rightarrow \text{Expansió de } \mathbb{E}_\sigma \text{ amb } \alpha \rightarrow \text{Plasticitat amb enduriment} \\ \bullet H' < 0 \Rightarrow \text{Contracció de } \mathbb{E}_\sigma \text{ amb } \alpha \rightarrow \text{Plasticitat amb ablaniment} \\ \bullet H' = 0 \Rightarrow \text{Domini elàstic constant } (\mathbb{E}_\sigma = \mathbb{E}_\sigma^0) \rightarrow \text{Plasticitat perfecta} \end{array} \quad (8.46)$$

4. *Condicions de càrrega-descàrrega (condicions de Kuhn-Tucker) i de consistència*

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condicions de} \\ \text{càrrega - descàrrega} \end{array} \right\} \rightarrow \lambda \geq 0 \ ; \ F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) \leq 0 \ ; \ \lambda F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Condicció de} \\ \text{consistència} \end{array} \right\} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \Rightarrow \lambda \cdot dF(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0$$
(8.47)

Les condicions de càrrega-descàrrega i de consistència són un ingredient addicional, respecte al cas unidimensional, que permeten obtenir, després d'alguna manipulació algebraica, el multiplicador plàstic λ en l'equació (8.44).

8.7.1 Equació constitutiva

De forma similar al cas uniaxial, l'equació constitutiva distingeix entre les situacions següents:

- *Règim elàstic:*

$$\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{E}_{\sigma} \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.48)$$

- *Règim elastoplàstic en descàrrega:*

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbb{E}_{\sigma} \\ dF(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.49)$$

- *Règim elastoplàstic en càrrega plàstica:*

$$\left. \begin{array}{l} \boldsymbol{\sigma} \in \partial \mathbb{E}_{\sigma} \\ dF(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}^{ep} : d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.50)$$

on \mathbf{C}^{ep} és el denominat *tensor constitutiu elastoplàstic* que, després d'algunes operacions algebraiques tenint en compte les equacions (8.43) a (8.47), s'escriu de la manera següent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{C}^{ep}(\boldsymbol{\sigma}, \alpha) = - \frac{\mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}}{H' + \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \\ \mathbf{C}_{ijkl}^{ep} = \mathbf{C}_{ijkl} - \frac{\mathbf{C}_{ijpq} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{rs}} \mathbf{C}_{rskl}}{H' + \frac{\partial F}{\partial \sigma_{pq}} \mathbf{C}_{pqrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}} \quad i, j, k, l, \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad (8.51)$$

8.8 Superfícies de fluència. Criteris de falla

Un ingredient fonamental de la teoria de la plasticitat és l'existència d'un domini elàstic inicial \mathbb{E}_{σ}^0 (vegeu la Figura 8-26) que es pot escriure de la forma:

$$\mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e < 0\} \quad (8.52)$$

i que determina un domini a l'espai de tensions delimitat per la superfície de fluència inicial $\partial\mathbb{E}_\sigma^0$:

$$\partial\mathbb{E}_\sigma^0 := \{\boldsymbol{\sigma} \mid F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \phi(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = 0\} \quad (8.53)$$

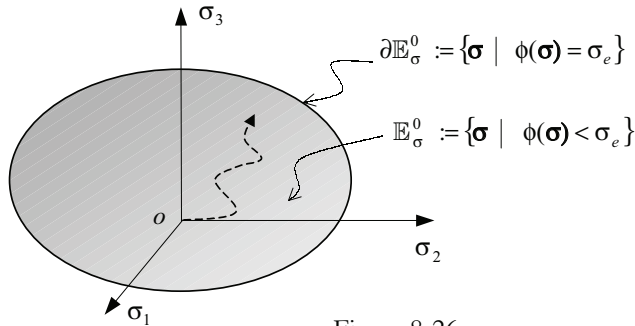


Figura 8-26

Atès que el domini elàstic inicial conté l'origen de l'espai de tensions ($\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$), tot procés de càrrega en qualsevol punt del medi inclourà un règim elàstic (mentre la trajectòria de tensions romanguí a l'interior de \mathbb{E}_σ^0 , vegeu la Figura 8-26) que acabarà en l'instant en què la trajectòria esmentada assoleixi la superfície de fluència $\partial\mathbb{E}_\sigma^0$. La superfície de fluència inicial exerceix llavors un paper indicador de l'instant de *falla* (entès com a fi del comportament elàstic) independentment del possible comportament *post-falla* (comportament plàstic) que s'iniciï més enllà de l'instant esmentat. D'aquí la importància de la superfície de fluència inicial i l'interès de formular les equacions matemàtiques que la determinen de forma adequada per als diferents materials d'interès en l'enginyeria.

NOTA

El fet que la superfície de fluència, entesa com un ingredient addicional de l'equació constitutiva, sigui independent del sistema de referència caracteritza un comportament elastoplàstic isòtrop.

Per tal de fer la superfície de fluència independent del sistema de referència (material isòtrop), encara que es formulï en l'espai de tensions principals, la seva equació matemàtica se sol plantejar en funció dels invariants tensionals:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv F(I_1, J'_2, J'_3) \quad (8.54)$$

i, ja que s'adopta el criteri $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, la seva definició només afectarà el primer sector de l'espai de tensions principals, estenent-se automàticament, per les condicions de simetria (vegeu l'Observació 8-7), als sectors restants de la Figura 8-7.

8.8.1 Criteri de von Mises

En el criteri de von Mises es defineix la superfície de fluència mitjançant:

$$\text{Criteri de von Mises} \rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = \sqrt{3J'_2} - \sigma_e = 0 \quad (8.55)$$

on $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{3J'_2}$ és la *tensió efectiva* (vegeu l'observació (8.3)). Una expressió alternativa s'obté considerant les equacions (8.18) i (8.19) i substituint-les en l'equació (8.55), i s'obté:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2} - \sigma_e = 0 \quad (8.56)$$

La representació gràfica de la superfície de fluència de von Mises es pot veure a la Figura 8-27.

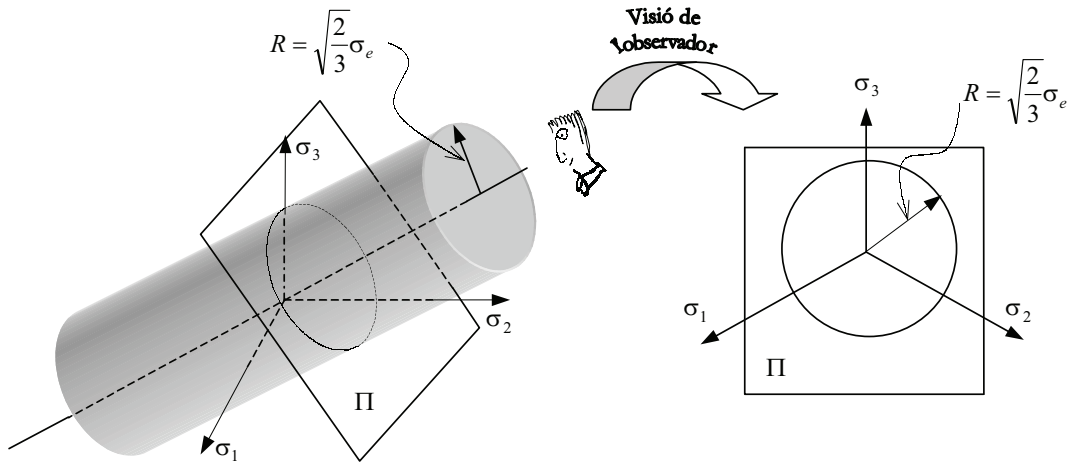


Figura 8-27 – Criteri de von Mises

Observació 8-16

L'equació (8.55) posa de manifest la dependència de la superfície de fluència de von Mises únicament del segon invariant del tensor de tensions J'_2 . En conseqüència, tots els punts de la superfície vindran caracteritzats per un mateix valor de J'_2 , la qual cosa defineix un cilindre l'eix del qual és l'eix de tensió hidrostàtica.

Observació 8-17

El criteri de von Mises és adequat com a criteri d'error o de ruptura en metalls, en els quals, típicament, estats de tensió hidrostàtica (tant de tracció com de compressió) tenen un comportament elàstic i la ruptura es produeix a causa de la presència de components desviadors de la tensió.

Exemple 8-2 *Obteniu l'expressió del criteri de von Mises per a un cas de tensió uniaxial.*

Resolució

Per a un cas de tensió uniaxial, caracteritzat per l'estat tensional:



$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

resulta ser (vegeu l'Exemple 8-1) $\bar{\sigma} = |\sigma_u|$ i substituint a l'equació (8.55):

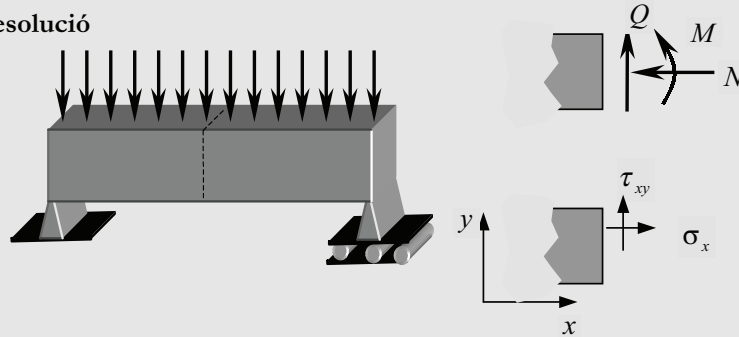
$$F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e$$

i el domini elàstic inicial queda caracteritzat, de la mateixa forma que per al cas de plasticitat unidimensional de l'apartat 8.6.2, per la condició:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow |\sigma_u| < \sigma_e$$

Exemple 8-3 *Obteniu l'expressió del criteri de von Mises per a un estat tensional típic de flexió composta en bigues.*

Resolució



L'estat tensional per a un cas de flexió composta resulta ser:

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma_m = \frac{1}{3} \sigma_x \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \sigma_x \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & -\frac{1}{3} \sigma_x & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \sigma_x \end{bmatrix}$$

$$J'_2 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \sigma_x^2 + \frac{1}{9} \sigma_x^2 + \frac{1}{9} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{xy}^2 \right) = \frac{1}{3} \sigma_x^2 + \tau_{xy}^2$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J'_2} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} \Rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow \bar{\sigma} < \sigma_e \Rightarrow$$

$$\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} < \sigma_e$$

La tensió de comparació $\sigma_{co} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2}$, que es pot entendre com un escalar de comparació davant el límit elàstic uniaxial σ_e , s'utilitza sovint en les normes de disseny d'estructures metàl·liques.

8.8.2 Criteri de Tresca o de la màxima tensió tangencial

El criteri de Tresca es coneix també com a *criteri de la màxima tensió tallant* i estableix que el domini elàstic finalitza, per a un cert punt del medi, quan la màxima tensió tangencial actuant en qualsevol dels plans que passen pel punt, $\tau_{m\grave{a}x.}$, assoleix la meitat del límit elàstic uniaxial σ_e :

$$\tau_{m\grave{a}x.} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2} \quad (8.57)$$

En la Figura 8-28 s'esquematitza la situació d'error en termes de cercle de Mohr en tres dimensions. En un procés de càrrega en el qual el cercle va creixent des de l'origen, el comportament elàstic acaba quan el cercle de radi $\tau_{m\grave{a}x.}$ es fa tangent a la recta $\tau = \tau_{m\grave{a}x.} = \sigma_e/2$.

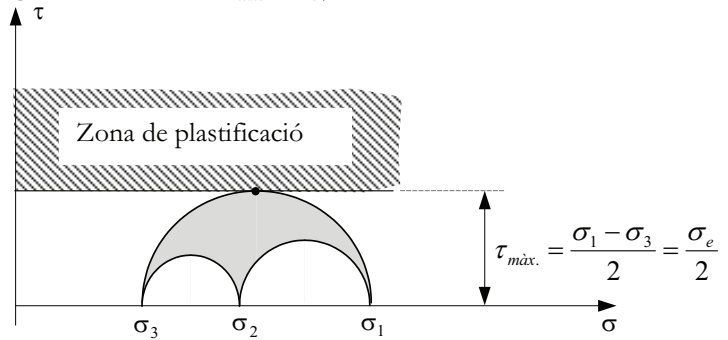


Figura 8-28

És evident que, en vista de l'equació (8.57), el criteri de Tresca es pot escriure com:

$$\text{Criteri de Tresca} \rightarrow F(\sigma) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = 0 \quad (8.58)$$

Observació 8-18

Es pot comprovar que el criteri de Tresca s'escriu de forma unívoca com una funció de J_2' i J_3' i que no depèn del primer invariant I_1 :

$$\text{Criteri de Tresca} \rightarrow F(\sigma) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e \equiv \mathcal{F}(J_2', J_3')$$

A la Figura 8-29 es presenta la corresponent superfície de fluència a l'espai de tensions principals, que resulta ser un prisma hexaèdric amb l'eix de tensió hidrostàtica.

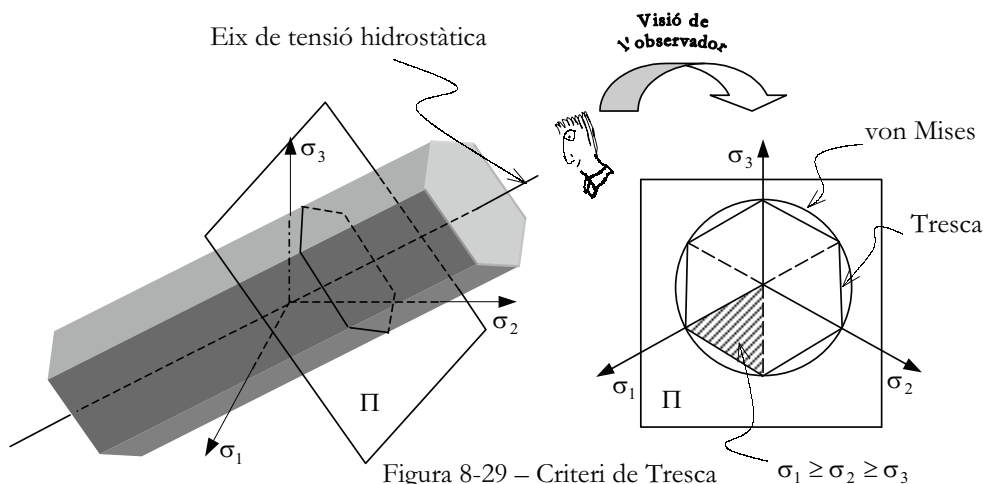


Figura 8-29 – Criteri de Tresca

Observació 8-19

En no dependre del primer invariant de tensions (i, per tant, de la tensió σ_{oct} , vegeu l'equació (8.16)), la superfície de fluència del criteri de Tresca no depèn de la distància de l'origen al pla octaèdric que passa pel punt (vegeu l'Observació 8-4), per la qual cosa si un punt de l'espai de tensions, caracteritzat pels seus invariants (I_1, J'_2, J'_3) , està sobre la superfície de fluència, també ho estaran tots els punts de l'espai de tensions amb els mateixos valors de (J'_2, J'_3) . Aquesta circumstància qualifica la superfície de fluència com una superfície prismàtica l'eix de la qual és l'eix de tensió hidrostàtica. D'altra banda, la dependència dels dos invariants (J'_2, J'_3) impedeix que, com passa amb el cas de la superfície de von Mises, es tracti d'una superfície cilíndrica. En definitiva, les condicions de simetria estableixen que la superfície del criteri de Tresca sigui un prisma hexagonal inscrit en el cilindre de von Mises (vegeu la Figura 8-29).

Exemple 8-4 *Obteniu l'expressió del criteri de Tresca per a un cas de tensió uniaxial.*

Resolució

Per a un cas de tensió uniaxial, caracteritzat per l'estat tensional:



$$\sigma \equiv \begin{bmatrix} \sigma_u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sigma_u \geq 0 \quad & \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = \sigma_u \\ \sigma_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = \sigma_u - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e \\
 \text{b) } \sigma_u < 0 \quad & \left. \begin{array}{l} \sigma_1 = 0 \\ \sigma_3 = \sigma_u \end{array} \right\} \Rightarrow F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3) - \sigma_e = -\sigma_u - \sigma_e = |\sigma_u| - \sigma_e
 \end{aligned}$$

i el domini elàstic inicial queda caracteritzat, de la mateixa forma que per al cas de plasticitat unidimensional de l'apartat 8.6.2, per la condició:

$$F(\boldsymbol{\sigma}) < 0 \Rightarrow |\sigma_u| < \sigma_e$$

Observació 8-20

El criteri de Tresca s'utilitza per modelar el comportament dels metalls de forma similar al cas del criteri de von Mises (vegeu l'Observació 8-17).

8.8.3 Criteri de Mohr-Coulomb

El criteri de Mohr-Coulomb es pot considerar una generalització del criteri de Tresca, en el qual la màxima tensió tangencial resistida depèn del mateix estat tensional en el punt (vegeu la Figura 8-30). La línia de falla, a l'espai del cercle de Mohr, és una recta caracteritzada per la cohesió c i l'angle de fricció interna ϕ , considerats propietats del material:

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg} \phi \quad (8.59)$$

La finalitat del comportament elàstic (falla) en un procés de càrrega creixent, es produeix quan un primer punt del cercle de Mohr (corresponent a un cert pla) assolix la línia de falla esmentada.

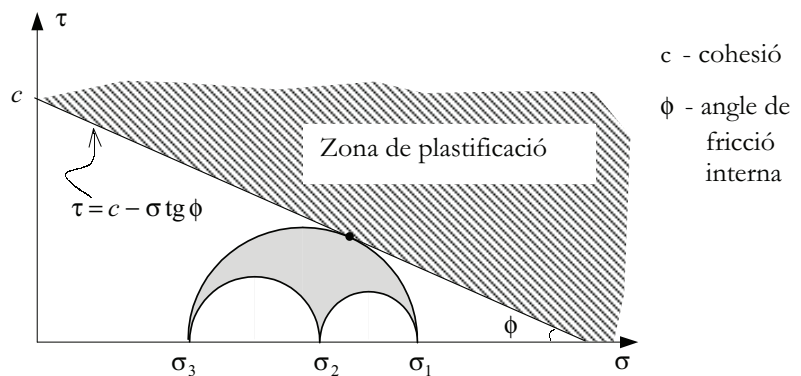


Figura 8-30 – Criteri de Mohr-Coulomb

La tensió tangencial en el pla esmentat, τ , serà més petita com més gran sigui la tensió normal σ i, en aquest cas, és evident que el comportament d'aquest model a tracció serà molt diferent del comportament a compressió. Tal com es veu en la Figura 8-30, la línia de falla talla a l'eix de les tensions normals al costat positiu d'aquestes, i limita així la capacitat del material de resistir traccions.

Per obtenir l'expressió matemàtica de la superfície de fluència, considerem un estat tensional per al qual es produeix l'inici de la plastificació. En aquest cas, el cercle de Mohr definit per les tensions principals major i menor serà tangent a la línia de falla (vegeu la Figura 8-31) en el punt A , verificant-se:

$$R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \tau_A = R \cos \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi \\ \sigma_A = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + R \sin \phi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \end{cases} \quad (8.60)$$

i substituint l'equació (8.60) a la (8.59), es té:

$$\begin{aligned} \tau_A &= c - \sigma_A \tan \phi \Rightarrow \tau_A + \sigma_A \tan \phi - c = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi + \left[\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right] \tan \phi - c &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi &= 0 \end{aligned} \quad (8.61)$$

Criteri de Mohr-Coulomb	$\rightarrow F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$	(8.62)
----------------------------	--	--------

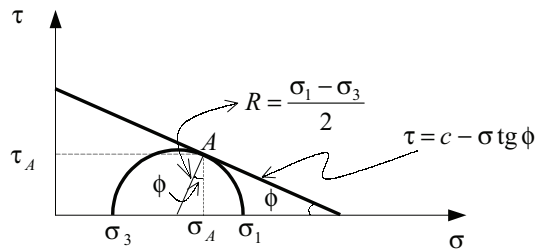


Figura 8-31

Observació 8-21

L'equació $F(\boldsymbol{\sigma}) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3) \sin \phi - 2c \cos \phi = 0$ (lineal en σ_1, σ_3) defineix *un pla* l'espai de tensions principals restringit al sector $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. L'extensió, per simetrització als altres sis sectors (vegeu l'Observació 8-7), defineix sis plans que constitueixen una piràmide, de longitud indefinida, l'eix de la qual és l'eix de pressió hidrostàtica (vegeu la Figura 8-32). La distància del vèrtex de la piràmide a l'origen de l'espai de tensions és $d = \sqrt{3} c \cot \phi$.

Observació 8-22

La particularització $\phi = 0$ i $c = \sigma_e / 2$ en el criteri de Mohr-Coulomb recobra el criteri de Tresca (vegeu les equacions (8.58) i (8.62)).

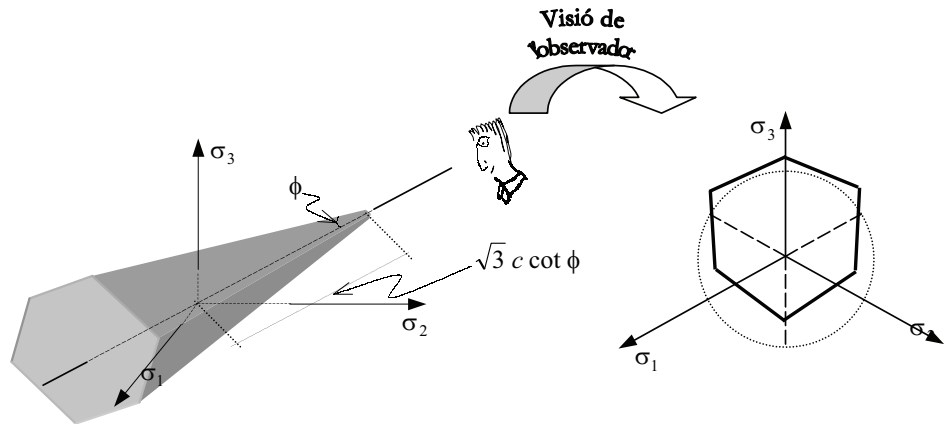


Figura 8-32 – Criteri de Mohr-Coulomb

Observació 8-23

En mecànica de sòls, el criteri de signes de les tensions normals és el contrari que en mecànica de medis continus ($\sigma \equiv -\sigma$, vegeu el capítol 4) $\Rightarrow \sigma_1 \equiv -\sigma_3$ i $\Rightarrow \sigma_3 \equiv -\sigma_1$, per la qual cosa el criteri de Mohr-Coulomb de l'equació (8.62) s'escriu de la manera següent:

$$F(\sigma) \equiv (\sigma_1 - \sigma_3) - (\sigma_1 + \sigma_3) \tan \phi - 2c \cos \phi$$

i les representacions gràfiques corresponents es presenten en la Figura 8-33 i Figura 8-34.

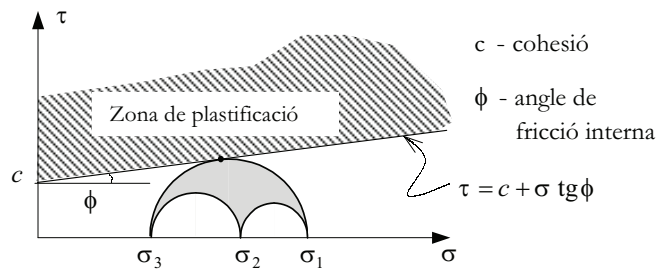


Figura 8-33

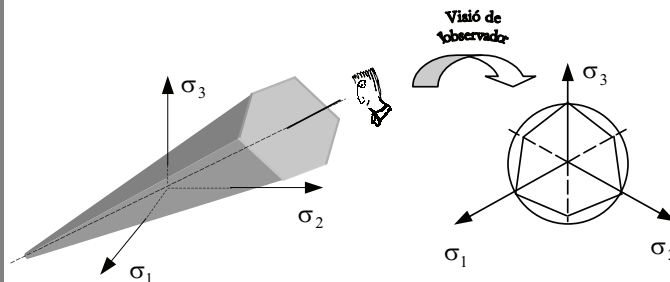


Figura 8-34 – Criteri de Mohr-Coulomb en mecànica de sòls

Observació 8-24

Després d'algunes operacions algebraiques, el criteri de Mohr-Coulomb es pot escriure en funció dels tres invariants tensionals:

$$\text{Criteri de Mohr-Coulomb} \rightarrow F(\sigma) \equiv \mathcal{F}(I_1, J_2', J_3')$$

Observació 8-25

El criteri de Mohr-Coulomb resulta especialment adequat per a materials friccional (formigó, roques i sòls) que es caracteritzen per exhibir diferències substancials entre els límits elàstics uniaxials a tracció i a compressió.

8.8.4 Criteri de Drucker-Prager

La superfície de fluència que defineix el criteri de Drucker-Prager ve donada per l'expressió:

$$\text{Criteri de Drucker-Prager} \rightarrow F(\sigma) \equiv 3\alpha\sigma_m + (J_2')^{1/2} - \beta = 0 \quad (8.63)$$

on:

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)} \quad ; \quad \beta = \frac{6c \cos\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)} \quad ; \quad \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (8.64)$$

sent c i ϕ la cohesió i angle de fricció interna, respectivament, que són considerats propietats del material. Tenint en compte les expressions (8.16)

($\sigma_m = \frac{I_1}{3} = \sigma_{oct}$) i (8.18) ($\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} [J_2']^{1/2}$), el criteri es pot escriure de la manera següent:

$$F(\sigma) \equiv \alpha I_1 + (J_2')^{1/2} - \beta = 3\alpha\sigma_{oct} + \sqrt{\frac{3}{2}} \tau_{oct} - \beta = \mathcal{F}(I_1, J_2',) = 0 \quad (8.65)$$

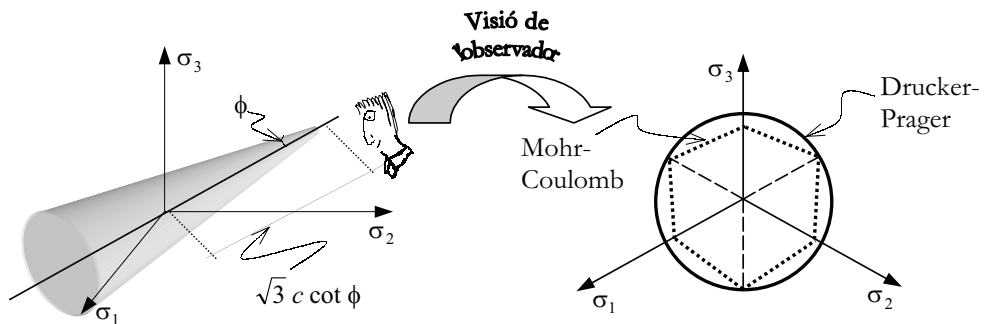


Figura 8-35 – Criteri de Drucker-Prager

Observació 8-24

La independència del tercer invariant, J_3' , estableix que si un determinat punt de l'espai de tensions és sobre la superfície de fluència, tots els altres punts amb el mateix valor dels invariants I_1, J_2' també hi seran, independentment del valor del tercer invariant J_3' . Atès que valors constants dels invariants esmentats corresponen a punts del pla octaèdric situats a la mateixa distància de l'eix de tensió hidrostàtica (vegeu la Figura 8-6), es pot concloure que la superfície de fluència serà una superfície de revolució al voltant de l'eix esmentat. A més, com que la relació entre σ_{oct} i τ_{oct} en l'equació (8.65) és lineal, es tractarà d'una superfície cònica l'eix de la qual és l'eix de tensió hidrostàtica (vegeu la Figura 8-5 i Figura 8-35)). La distància del vèrtex del con a l'origen de l'espai de tensions resulta ser $d = \sqrt{3} c \cot \phi$. Es pot comprovar també que la superfície de Drucker-Prager té semiinscrita una superfície de Mohr-Coulomb amb els mateixos valors de cohesió, c , i angle de fricció interna, ϕ .

Observació 8-25

La situació del vèrtex del con de Drucker-Prager al costat positiu de l'eix de tensió hidrostàtica estableix una limitació del rang de comportament elàstic per a estats de tensió hidrostàtica de tracció (mentre que no hi ha limitació en el límit elàstic per al cas de compressió hidrostàtica). Aquesta situació, que també es produeix en el criteri de Mohr-Coulomb, és característica dels materials cohesius-friccionals (formigó, roques i sòls) per als quals resulten especialment adequats tots dos criteris.

Observació 8-26

En mecànica del sòls, on el criteri de signes per a les tensions normals s'inverteix, la superfície de fluència de Drucker-Prager seria la indicada a la Figura 8-36:

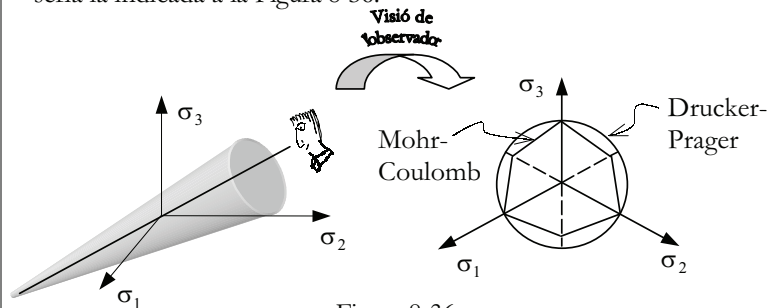


Figura 8-36

Observació 8-29

La particularització $\phi = 0$ i $c = \sigma_e / 2$ en el criteri de Drucker-Prager recobra el criteri de von Mises (vegeu les equacions (8.55), (8.63) i (8.64)).

9 Equacions constitutives en fluids

9.1 Concepte de pressió

En mecànica de medis continus es fan servir diversos conceptes de pressió (pressió hidrostàtica, pressió mitjana i pressió termodinàmica) que, en general, no són coincidents.

9.1.1 Pressió hidrostàtica

Principi de Pascal

En un fluid en repòs l'estat tensional sobre qualsevol pla que passi per un punt és el mateix i està caracteritzat per una tensió normal de compressió.

D'acord amb el principi de Pascal, l'estat tensional d'un fluid en repòs està caracteritzat per un tensor de tensions de la forma:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \\ \sigma_{ij} = -p_0 \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (9.1)$$

on p_0 és la denominada *pressió hidrostàtica* (vegeu la Figura 9-1).

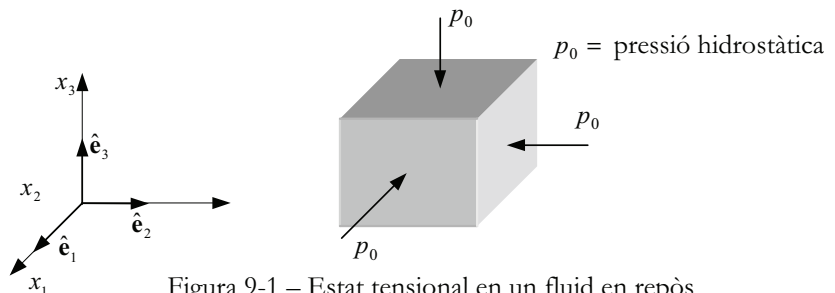


Figura 9-1 – Estat tensional en un fluid en repòs

Definició

Pressió hidrostàtica:

Tensió normal de compressió, constant sobre qualsevol pla, que actua sobre un fluid en repòs.

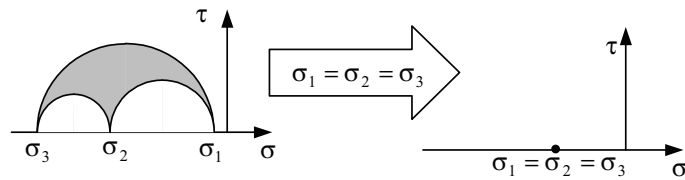


Figura 9-2

Observació 9-1

El tensor de tensions per a un fluid en repòs és un tensor *esfèric* i la seva representació al pla de Mohr correspon a un punt (vegeu la Figura 9-2). Per tant, qualsevol direcció és principal i l'estat tensional constitueix el que en el capítol 4 (vegeu l'apartat 4.8) s'ha denominat *estat tensional hidrostàtic*.

9.1.2 Pressió mitjana**Definicions**

Tensió mitjana:

Es defineix la tensió mitjana σ_m com:

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Pressió mitjana:

Es defineix la pressió mitjana \bar{p} com la tensió mitjana canviada de signe:

$$\bar{p} \stackrel{\text{def}}{=} \text{pressió mitjana} = -\sigma_m = -\frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{3} \sigma_{ii}$$

Observació 9-2

Per a un fluid en repòs, la pressió mitjana \bar{p} coincideix amb la pressió hidrostàtica p_0 :

$$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \Rightarrow \sigma_m = \frac{1}{3}(-3p_0) = -p_0 \Rightarrow \bar{p} = p_0$$

En general, per a un fluid en moviment la pressió mitjana i la pressió hidrostàtica no coincideixen.

Observació 9-3

La traça del tensor de tensions de Cauchy és una invariant del tensor de tensions. En conseqüència, la tensió mitjana i la pressió mitjana seran també invariants del tensor de tensions i, per tant, el seu valor no dependrà del sistema de coordenades cartesià adoptat.

9.1.3 Pressió termodinàmica. Equació cinètica d'estat

En les equacions constitutives de fluids o gasos intervé una nova variable termodinàmica de pressió que s'anomena *pressió termodinàmica* i es denota com p .

Definició

Pressió termodinàmica:

Variable de pressió que intervé en les equacions constitutives dels fluids i gasos i que està relacionada amb la densitat ρ i la temperatura absoluta θ mitjançant la denominada *equació cinètica d'estat*, $F(p, \rho, \theta) = 0$.

Exemple 9-1

Un exemple típic d'equació cinètica d'estat és la llei dels gasos:

$$F(p, \rho, \theta) \equiv p - \rho R \theta = 0 \Rightarrow p = \rho R \theta$$

on p és la pressió termodinàmica i R és la constant universal dels gasos.

Observació 9-4

Per a un *fluid en repòs*, la pressió hidrostàtica, la pressió mitjana i la pressió termodinàmica, coincideixen:

$$\text{fluid en repòs} \Rightarrow p_0 = \bar{p} = p.$$

En general, per a un fluid en moviment, la pressió termodinàmica p serà diferent de la pressió mitjana \bar{p} i de la pressió hidrostàtica p_0 .

Observació 9-5

Fluid barotròpic. Es diu que un fluid és barotròpic quan en l'equació cinètica d'estat no intervé la temperatura:

$$\text{Fluid barotròpic} \rightarrow F(p, \rho) = 0 \Rightarrow p = f(\rho) \Rightarrow \rho = g(p)$$

Observació 9-6

Fluid incompressible. Un cas particular de fluid barotròpic és el fluid incompressible, caracteritzat per tenir densitat constant ($\rho(\mathbf{x}, t) = k = \text{constant}$). En aquest cas l'equació cinètica d'estat es pot escriure així:

$$F(p, \rho, \theta) \equiv \rho - k = 0$$

i no depèn ni de la pressió ni de la temperatura.

9.2 Equacions constitutives en mecànica de fluids

A continuació considerarem el conjunt d'equacions, denominades genèricament *equacions constitutives*, que cal afegir a les equacions de conservació/balanç per a la formulació d'un problema de mecànica de fluids (vegeu el capítol 6, apartat 5.13). Aquestes equacions es poden agrupar de la manera següent:

a) Equacions constitutives termomecàniques

Expressen el tensor de tensions de Cauchy en funció d'altres variables termodinàmiques, típicament la pressió termodinàmica p , el tensor velocitat de deformació \mathbf{d} (que es pot considerar implícitament una funció de la velocitat $\mathbf{d}(\mathbf{v}) = \nabla^S \mathbf{v}$), la densitat ρ i la temperatura absoluta θ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equacions constitutives} \\ \text{termomecàniques} \end{array} \right\} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{d}, \rho, \theta) \quad (6 \text{ equacions}) \quad (9.2)$$

b) Equació constitutiva de l'entropia

Una equació algebraica que proporciona l'entropia específica s en funció de la velocitat de deformació, la densitat i la temperatura:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equació constitutiva} \\ \text{de l'entropia} \end{array} \right\} \rightarrow s = s(\mathbf{d}, \rho, \theta) \quad (1 \text{ equació}) \quad (9.3)$$

c) Equacions constitutives de tipus "termodinàmic" o equacions d'estat

Són típicament *l'equació calòrica d'estat*, que defineix l'energia interna específica u , i *l'equació cinètica d'estat*, que proporciona una equació per a la pressió termodinàmica:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Equació calòrica d'estat} \rightarrow u = g(\rho, \theta) \\ \text{Equació cinètica d'estat} \rightarrow F(\rho, p, \theta) = 0 \end{array} \right\} \quad (2 \text{ equacions}) \quad (9.4)$$

d) Equacions constitutives de tipus "tèrmic"

La més comuna és la denominada *lleï de Fourier*, que estableix el flux de calor per conducció \mathbf{q} com:

$$\text{Llei de Fourier} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{q} = -\mathbf{k} \cdot \nabla \theta \\ q_i = k_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad (3 \text{ equacions}) \quad (9.5)$$

on \mathbf{k} és el tensor (de segon ordre i simètric) de conductivitat tèrmica, que és una propietat del fluid. Per al cas isòtrop, el tensor de conductivitat

tèrmica és un tensor esfèric $\mathbf{k} = k\mathbf{1}$ i depèn del paràmetre escalar k que és la conductivitat tèrmica del fluid.

9.3 Equacions constitutives (mecàniques) en fluids viscosos

Les equacions constitutives termomecàniques per a un fluid viscos es poden escriure en general (vegeu l'equació (9.2)) com:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{f}(\mathbf{d}, \rho, \theta) \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + f_{ij}(\mathbf{d}, \rho, \theta) \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (9.6)$$

on \mathbf{f} és una funció tensorial simètrica. Segons el caràcter de la funció \mathbf{f} s'obtenen els models de fluids següents:

- a) *Fluids de Stokes o stokesians*: la funció \mathbf{f} és una funció no lineal dels seus arguments.
- b) *Fluids newtonians*: la funció \mathbf{f} és una funció *lineal* dels seus arguments.
- c) *Fluids perfectes*: la funció \mathbf{f} és idènticament nul·la. En aquest cas l'equació constitutiva mecànica és: $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}$.

A continuació es consideraran únicament els casos de fluids newtonians i de fluids perfectes.

Observació 9-7

La hipòtesi de fluid perfecte és molt freqüent en enginyeria hidràulica, on el fluid amb què es tracta és l'aigua.

9.4 Equacions constitutives (mecàniques) en fluids newtonians

NOTA

No es consideren aquí les possibles dependències de la temperatura en l'equació constitutiva.

L'equació constitutiva mecànica per als fluids newtonians es pot escriure com:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{C} : \mathbf{d} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + C_{ijkl}d_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (9.7)$$

on \mathbf{C} és un tensor constitutiu (de viscositat) *constant* de quart ordre. Com a resultat de l'equació (9.7) s'obté una dependència lineal del tensor de tensions $\boldsymbol{\sigma}$ amb la velocitat de deformació \mathbf{d} . Per a un *fluid newtonià isotrop*, el tensor constitutiu \mathbf{C} és un tensor *isotrop* de quart ordre.

$$\begin{cases} \mathbf{C} = \lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I} \\ C_{ijkl} = \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (9.8)$$

Observació 9-8

Observeu el paral·lelisme que es pot establir entre les equacions constitutives mecàniques d'un fluid newtonià i les d'un sòlid elàstic lineal (vegeu el capítol 6):

<i>Fluid newtonià</i>	<i>Sòlid elàstic lineal</i>
$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \mathbf{C} : \mathbf{d} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + C_{ijkl}d_{kl} \end{cases}$	$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \end{cases}$

Substituint l'equació (9.8) en l'equació constitutiva mecànica (9.7), s'obté el següent:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + (\lambda\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu\mathbf{I}) : \mathbf{d} = -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d} \quad (9.9)$$

Equació constitutiva

per a un fluid

newtonià isòtrop

$$\rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d} \\ \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda d_{kk}\delta_{ij} + 2\mu d_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (9.10)$$

Observació 9-9

Els dos paràmetres λ i μ corresponen físicament a viscositats enteses com a propietats del material. En el cas més general, poden no ser constants i dependre d'altres variables termodinàmiques:

$$\lambda = \lambda(\rho, \theta) \quad \mu = \mu(\rho, \theta)$$

Un exemple típic el constitueix una dependència de la viscositat amb la temperatura del tipus $\mu(\theta) = \mu_0 e^{-\alpha(\theta - \theta_0)}$, que estableix que la viscositat del fluid disminueix a mesura que augmenta la temperatura (vegeu la Figura 9-3).

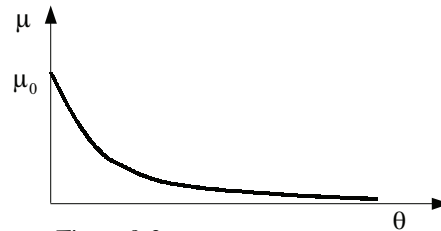


Figura 9-3

9.4.1 Relació entre la pressió termodinàmica i la pressió mitjana

En general la pressió termodinàmica, p , i la pressió mitjana, \bar{p} , en un fluid newtonià en moviment, seran diferents encara que estiguin relacionades entre si. A partir de l'equació constitutiva (mecànica) d'un fluid newtonià (9.10) es pot obtenir:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma})}_{-3\bar{p}} = -p\text{Tr}(\mathbf{1}) + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\text{Tr}(\mathbf{1}) + 2\mu \text{Tr}(\mathbf{d}) = -3p + (3\lambda + 2\mu)\text{Tr}(\mathbf{d}) \Rightarrow$$
(9.11)

$$p = \bar{p} + \underbrace{\left(\lambda + \frac{2}{3}\mu\right)}_{\mathcal{K}} \text{Tr}(\mathbf{d}) = \bar{p} + \mathcal{K} \text{Tr}(\mathbf{d}) =$$

on $\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ és la denominada *viscositat volumètrica del fluid*.

Viscositat volumètrica $\rightarrow \mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

(9.12)

Utilitzant l'equació de continuïtat (conservació de la massa), es té:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$
(9.13)

Considerant, a més, la relació:

$$\text{Tr}(\mathbf{d}) = d_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$
(9.14)

i substituint en l'equació (9.11), s'arriba a:

$p = \bar{p} + \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} = \bar{p} - \frac{\mathcal{K}}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$

(9.15)

que relaciona la pressió mitjana i la pressió termodinàmica.

Observació 9-10

D'acord amb l'equació (9.15), la pressió termodinàmica i la pressió mitjana, en un fluid newtonià, coincidiran en els casos següents:

- *Fluid en repòs* $\Rightarrow \mathbf{v} = 0 \Rightarrow p = \bar{p} = p_0$
- *Fluid incompressible* $\Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow p = \bar{p}$
- *Fluid amb viscositat volumètrica \mathcal{K} nul·la* (condició de Stokes):

$$\mathcal{K} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu \Rightarrow p = \bar{p}$$

NOTA

La condició de Stokes se suposa en certs casos perquè els resultats que s'obtenen concorden amb l'observació experimental.

9.4.2 Equació constitutiva en components esfèrics i desviadors

a) Part esfèrica

De l'equació (9.15) es té:

$$\bar{p} = p - \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} = p - \mathcal{K} \text{Tr}(\mathbf{d}) \quad (9.16)$$

b) Part desviadora

Utilitzant la descomposició del tensor de tensions $\boldsymbol{\sigma}$ i del tensor velocitat de deformació \mathbf{d} en els seus components esfèric i desviador, i substituint en l'equació constitutiva (9.10):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \frac{1}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' = -\bar{p} \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}' = -p \mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\sigma}' &= \underbrace{(\bar{p} - p)}_{-\mathcal{K} \text{Tr}(\mathbf{d})} \mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} = -\underbrace{\mathcal{K}}_{\lambda + \frac{2}{3}\mu} \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} = \\ &= -\frac{2}{3} \mu \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} = 2\mu \underbrace{\left[\mathbf{d} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} \right]}_{\mathbf{d}'} = 2\mu \mathbf{d}' \end{aligned} \quad (9.17)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}' = 2\mu \mathbf{d}'}$$

on s'han tingut en compte les equacions (9.16) i (9.12) ($\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu$).

9.4.3 Potència tensional, potència recuperable i potència dissipativa

Utilitzant de nou la descomposició del tensor de tensions i del tensor velocitat de deformació, en els seus components esfèric i desviador, es té:

$$\boldsymbol{\sigma} = -\bar{p} \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}', \quad \mathbf{d} = \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + \mathbf{d}' \quad (9.18)$$

i substituint en l'expressió de la densitat de potència tensional (per unitat de volum) $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d}$, s'obté:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} &= (-\bar{p} \mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma}') : \left(\frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + \mathbf{d}' \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \bar{p} \text{Tr}(\mathbf{d}) \underbrace{\mathbf{1} : \mathbf{1}}_3 + \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{d}' - \bar{p} \underbrace{\mathbf{1} : \mathbf{d}'}_{\text{Tr}(\mathbf{d}')=0} + \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{d}) \underbrace{\boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{1}}_{\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}')=0} = \\ &= -\bar{p} \text{Tr}(\mathbf{d}) + \boldsymbol{\sigma}' : \mathbf{d}' \end{aligned} \quad (9.19)$$

i substituint les equacions (9.16) i (9.17) en l'equació (9.19):

$$\begin{aligned} \bar{p} &= p - \mathcal{K} \nabla \cdot \mathbf{v} = p - \mathcal{K} \text{Tr}(\mathbf{d}) \\ \boldsymbol{\sigma}' &= 2\mu \mathbf{d}' \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (9.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -[p - \mathcal{K} \text{Tr}(\mathbf{d})] \text{Tr}(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \Rightarrow$$

NOTA

Es fa servir aquí la propietat que la traça de tot tensor desviador és nul·la.

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = \underbrace{-p \text{Tr}(\mathbf{d})}_{\text{potència recuperable } W_R} + \underbrace{\mathcal{K} \text{Tr}^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'}_{\text{potència dissipativa } 2W_D} = W_R + 2W_D \quad (9.21)$$

$$\begin{aligned} \text{Densitat de potència recuperable} &\rightarrow W_R = -p \text{Tr}(\mathbf{d}) \\ \text{Densitat de potència dissipativa} &\rightarrow 2W_D = \mathcal{K} \text{Tr}^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \end{aligned} \quad (9.22)$$

Associats als conceptes de potència recuperable i potència dissipativa apareixen els de les parts recuperable, $\boldsymbol{\sigma}_R$, i dissipativa, $\boldsymbol{\sigma}_D$, del tensor de tensions definides com:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{-p \mathbf{1}}_{\boldsymbol{\sigma}_R} + \underbrace{\lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}}_{\boldsymbol{\sigma}_D} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\sigma}_D} \quad (9.23)$$

Fent servir la notació esmentada, es poden reescriure les expressions de les densitats de la potència recuperable, de la potència dissipativa i de la potència total com:

$$\begin{cases} W_R = -p \text{Tr}(\mathbf{d}) = -p \mathbf{1} : \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} \\ 2W_D = \mathcal{K} \text{Tr}^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' = \boldsymbol{\sigma}_D : \mathbf{d} \end{cases} \quad (9.24)$$

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = (\boldsymbol{\sigma}_R + \boldsymbol{\sigma}_D) : \mathbf{d} = \boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} + \boldsymbol{\sigma}_D : \mathbf{d} = W_R + 2W_D$$

Observació 9-11

Per a un fluid incompressible, la potència recuperable és nul·la. En efecte, per ser el fluid incompressible $\frac{dp}{dt} = 0$ i per l'equació de

$$\text{continuitat } \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = 0 = \text{Tr}(\mathbf{d}) \Rightarrow W_R = -p \text{Tr}(\mathbf{d}) = 0.$$

Observació 9-12

Fent servir la descomposició de la potència tensional (9.24), el teorema de les forces vives es pot escriure com:

$$P_e = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \int_V \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \, dV = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \int_V \boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} \, dV + \int_V \boldsymbol{\sigma}_D : \mathbf{d} \, dV$$

$$\boxed{P_e = \frac{d\mathcal{K}}{dt} + \int_V W_R \, dV + \int_V 2W_D \, dV}$$

que indica que la potència mecànica entrant en el fluid P_e s'inverteix a modificar l'energia cinètica \mathcal{K} i a crear potència recuperable i potència dissipativa.

9.4.4 Consideracions termodinàmiques

- 1) Es pot demostrar que, sota condicions molt generals, la potència recuperable específica (per unitat de massa) és una diferencial exacta:

$$\frac{1}{\rho} W_R = \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} = \frac{dG}{dt} \quad (9.25)$$

En aquest cas, el treball recuperable, per unitat de massa, realitzat en un cicle tancat serà nul (vegeu la Figura 9-4):

$$\int_A^{B \equiv A} \frac{1}{\rho} W_R dt = \int_A^{B \equiv A} \frac{1}{\rho} \boldsymbol{\sigma}_R : \mathbf{d} dt = \int_A^{B \equiv A} dG = G_{B \equiv A} - G_A = 0 \quad (9.26)$$

Això justifica la denominació de *potència recuperable* per a W_R .

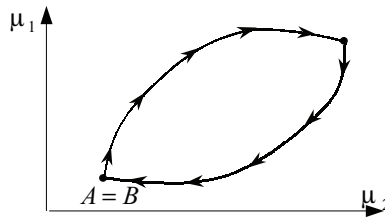


Figura 9-4

- 2) D'altra banda, el segon principi de la termodinàmica permet demostrar que la potència dissipativa $2W_D$ de l'equació (9.24) és sempre no negativa:

$$2W_D \geq 0 \quad 2W_D = 0 \Leftrightarrow \mathbf{d} = 0 \quad (9.27)$$

i que, per tant, en un cicle tancat el treball per unitat de massa realitzat per les tensions dissipatives no serà, en general, nul:

$$\int_A^B \frac{1}{\rho} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}_D : \mathbf{d}}_{2W_D > 0} dt > 0 \quad (9.28)$$

Això justifica la denominació de *potència dissipativa* (no recuperable) per a $2W_D$. La potència dissipativa és responsable del fenomen de *dissipació* (o de pèrdua d'energia) en els fluids.

Exemple 9-2 Justifiquen per què un fluid newtonià incompressible en moviment, al qual no es proporciona potència (treball per unitat de temps) des de l'exterior, tendeix a reduir la seva velocitat fins a aturar-se.

Resolució

En ser el fluid incompressible, la potència recuperable és nul·la (vegeu l'Observació 9-11). A més, se sap que la potència dissipativa $2W_D$ és sempre positiva (vegeu l'equació (9.27)). Finalment, aplicant el teorema de les forces vives (vegeu l'Observació 9-12) es té:

$$0 = P_e = \frac{dK}{dt} + \int_V \underbrace{W_R}_{=0} dV + \int_V 2W_D dV \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v^2 dV = - \int_V \underbrace{2W_D}_{>0} dV < 0$$

i, per tant, el fluid perd (*dissipa*) energia cinètica i la velocitat de les seves partícules disminueix.

9.4.5 Limitacions en els valors de les viscositats

S'ha vist que, per consideracions termodinàmiques, la potència dissipativa $2W_D$ de l'equació (9.24) és sempre no negativa:

$$\boxed{2W_D = \mathcal{K} \text{Tr}^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \geq 0} \quad (9.29)$$

Aquesta restricció termodinàmica introdueix unes limitacions sobre els valors admissibles dels paràmetres de viscositat \mathcal{K} , λ i μ del fluid. En efecte, donat un cert fluid, la restricció esmentada s'ha de verificar per a tots els moviments possibles (és a dir, camps de velocitats \mathbf{v}) d'aquest i, per tant, per a qualsevol valor arbitrari del tensor velocitat de deformació $\mathbf{d} = \nabla^S(\mathbf{v})$. Considerem, en particular, els dos casos següents:

a) *El tensor velocitat de deformació \mathbf{d} és un tensor purament esfèric.*

En aquest cas es tindrà:

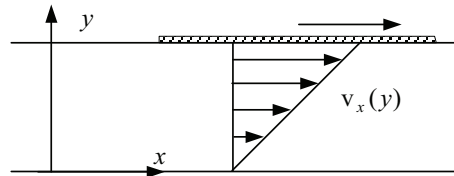
$$\text{Tr}(\mathbf{d}) \neq 0; \quad \mathbf{d}' = 0 \Rightarrow 2W_D = \mathcal{K} \text{Tr}^2(\mathbf{d}) \geq 0 \Rightarrow \boxed{\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu \geq 0} \quad (9.30)$$

de manera que seran únicament factibles valors no negatius de la viscositat volumètrica \mathcal{K} .

b) *El tensor velocitat de deformació \mathbf{d} és un tensor purament desviador.*

En la Figura 9-5 es presenta esquemàticament un d'aquests fluxos. En aquest cas, de l'equació (9.29) es tindrà:

$$\text{Tr}(\mathbf{d}) = 0, \quad \mathbf{d}' \neq 0 \Rightarrow 2W_D = 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' = 2\mu \underbrace{d'_{ij}d'_{ij}}_{>0} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\mu \geq 0} \quad (9.31)$$



$$\mathbf{v}(x, y) = \begin{Bmatrix} v_x(y) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_x}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{d}'$$

Figura 9-5

10 Mecànica de fluids

10.1 Equacions del problema de mecànica de fluids

Un fluid és un cas particular de medi continu que es caracteritza per les equacions constitutives que li són pròpies. En conseqüència, el problema de mecànica de fluids vindrà governat per les equacions següents:

a) Equacions de conservació/balanç

1) *Equació de continuïtat*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.1)$$

2) *Equació de balanç de la quantitat de moviment*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3 \text{ equacions}) \quad (10.2)$$

3) *Equació de balanç d'energia*

$$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.3)$$

4) *Restriccions imposades pel segon principi de la termodinàmica*

$$\begin{aligned} \text{Desigualtat de Clausius - Plank} & \rightarrow -\rho \left(\frac{du}{dt} - \theta \frac{ds}{dt} \right) + \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} \geq 0 \\ \text{Desigualtat de la conducció de calor} & \rightarrow -\frac{1}{\rho \theta^2} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

b) Equacions constitutives

5) *Equació constitutiva termomecànica*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} \quad (6 \text{ equacions}) \quad (10.5)$$

6) *Equació constitutiva de l'entropia*

$$s = s(\mathbf{d}, \rho, \theta) \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.6)$$

7) *Equació de conducció de la calor*

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta \quad (3 \text{ equacions}) \quad (10.7)$$

c) Equacions termodinàmiques d'estat8) *Equació calòrica d'estat*

$$u = u(\rho, \theta) \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.8)$$

9) *Equació cinètica d'estat*

$$F(\rho, p, \theta) = 0 \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.9)$$

Les incògnites del problema que apareixen en les equacions de govern són:

NOTA
 Observeu que el tensor velocitat de deformació \mathbf{d} no s'ha considerat com a incògnita, en considerar-lo implícitament com una funció de la velocitat \mathbf{v} .

$$\left. \begin{array}{l} \rho \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ \mathbf{v} \rightarrow 3 \text{ incògnites} \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow 6 \text{ incògnites} \\ u \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ \mathbf{q} \rightarrow 3 \text{ incògnites} \\ \theta \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ s \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ p \rightarrow 1 \text{ incògnita} \end{array} \right\} \rightarrow 17 \text{ incògnites} \quad (10.10)$$

Hi ha en total un sistema de 17 EDP amb 17 incògnites que, en general, s'haurà de resoldre conjuntament, és a dir, de forma acoblada. Tanmateix, com ja es va comentar en el capítol 5 (apartat 5.13.1), sota certes hipòtesis o situacions, és possible plantejar un sistema d'equacions més reduït, denominat problema mecànic, i resoldre de forma desacoblada per a un nombre més reduït d'incògnites (variables mecàniques).

Considerem el cas d'un *fluid barotròpic* que es caracteritza perquè la temperatura no intervé en l'equació cinètica d'estat, resultant:

$$\begin{array}{l} \text{Equació cinètica} \\ \text{d'estat} \end{array} \rightarrow F(\rho, p) = 0 \Rightarrow \rho = \rho(p) \quad (10.11)$$

que estableix que la densitat es pot descriure mitjançant, únicament, la pressió termodinàmica (vegeu la Figura 10-1). Suposant, a més, que la temperatura no intervé en l'equació constitutiva termomecànica (10.5), podem definir les *equacions de govern del problema mecànic (desacoblat) d'un fluid newtonià* com:

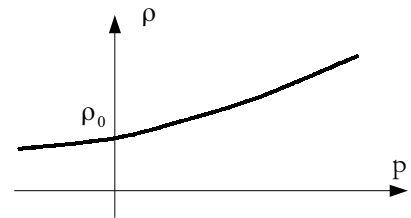


Figura 10-1

1) *Equació de continuïtat*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.12)$$

2) *Equació de Cauchy*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3 \text{ equacions}) \quad (10.13)$$

3) *Equació constitutiva mecànica*

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d} \quad (6 \text{ equacions}) \quad (10.14)$$

4) *Equació cinètica d'estat*

$$\rho = \rho(p) \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.15)$$

Les incògnites del problema que apareixen en les equacions anteriors són:

$$\left. \begin{array}{l} \rho \rightarrow 1 \text{ incògnita} \\ \mathbf{v} \rightarrow 3 \text{ incògnites} \\ \boldsymbol{\sigma} \rightarrow 6 \text{ incògnites} \\ p \rightarrow 1 \text{ incògnita} \end{array} \right\} \rightarrow 11 \text{ incògnites} \quad (10.16)$$

Es té llavors un sistema reduït d'11 equacions amb 11 incògnites (problema mecànic), que es pot resoldre de forma desacoblada de la resta del problema (problema tèrmic).

10.2 Hidrostàtica. Fluids en repòs

Considerem a continuació els següents casos particulars en funció de la velocitat del fluid:

a) Velocitat uniforme: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \mathbf{v}(t)$

En aquest cas, la descripció espacial de la velocitat no depèn del punt i és funció únicament del temps. Llavors:

$$\mathbf{d} = \nabla^s \mathbf{v} = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{v}] = \mathbf{0} \quad (10.17)$$

Considerant, a més, l'equació constitutiva (10.14):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda \underbrace{\text{Tr}(\mathbf{d})}_{=0} + 2\mu \underbrace{\mathbf{d}}_{=0} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}} \quad (10.18)$$

que indica que l'estat tensional és hidrostàtic (vegeu la Figura 10-2). A més, la pressió mitjana \bar{p} i la pressió termodinàmica p coincideixen:

$$\text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}) = -3\bar{p} = -3p \Rightarrow \boxed{\bar{p} = p} \quad (10.19)$$

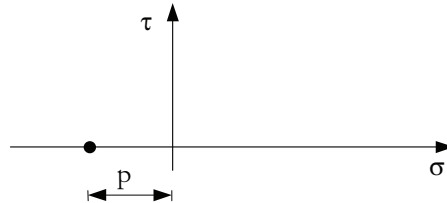


Figura 10-2

- b) Velocitat uniforme i estacionària: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{constant}$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \quad \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\sigma} &= -p_0 \mathbf{1} \Rightarrow \bar{p} = p = p_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Hidrostàtica} \quad (10.20)$$

Aquest és el cas més general de la *hidrostàtica*, que ve caracteritzat per una acceleració nul·la (velocitat de cada partícula constant, encara que no necessàriament nul·la) i les tres pressions (termodinàmica p , mitjana \bar{p} i hidrostàtica p_0) coincidents.

- c) Fluid en repòs: $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{constant} = \mathbf{0}$

Un cas particular de la hidrostàtica és el d'un fluid en repòs amb velocitat nul·la

10.2.1 Equacions de la hidrostàtica

El problema hidrostàtic ve governat per les equacions següents:

1. Equació constitutiva

$$\left\{ \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p_0 \mathbf{1} \\ \sigma_{ij} &= -p_0 \delta_{ij} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \quad (10.21)$$

on p_0 és la pressió hidrostàtica.

Observació 10-1

Principi de Pascal: En un fluid en repòs la pressió és la mateixa en totes les direccions.

Aquest postulat, clàssic de la mecànica de fluids, queda garantit per l'estructura esfèrica del tensor de tensions en l'equació (10.21) que garanteix que totes les direccions són principals (vegeu la Figura 10-3).

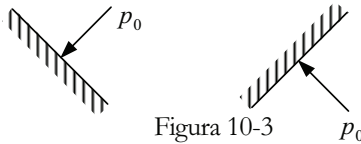


Figura 10-3

2. Equació de continuïtat

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \mathbf{v} &= \text{constant} \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\rho(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}) = \text{constant}} \quad (10.22)$$

i la densitat d'una mateixa partícula no varia amb el temps.

3. Equació de Cauchy

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (10.23)$$

Substituint l'equació (10.21) ($\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1}$) i (10.22) ($\rho = \rho_0$) en l'equació (10.23):

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \nabla \cdot (-p_0 \mathbf{1}) = -\nabla p_0 \\ [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}]_j = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (-p_0 \delta_{ij}) = -\frac{\partial p_0}{\partial x_j} = -[\nabla p_0]_j \quad j \in \{1,2,3\} \end{cases} \Rightarrow \quad (10.24)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Equació fonamental} \\ \text{de la hidrostàtica} \end{array} \rightarrow \begin{cases} -\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0} \\ -\frac{\partial p_0}{\partial x_i} + \rho_0 b_i = 0 \quad i \in \{1,2,3\} \end{cases}} \quad (10.25)$$

10.2.2 Força gravitatòria. Distribució triangular de pressió

Considerem com a cas particular, d'altra banda molt freqüent, aquell en què les forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ són les forces gravitatòries (suposades constants en l'espai i en el temps, i orientades en la direcció contrària l'eix x_3 , tal com es mostra en la Figura 10-4).

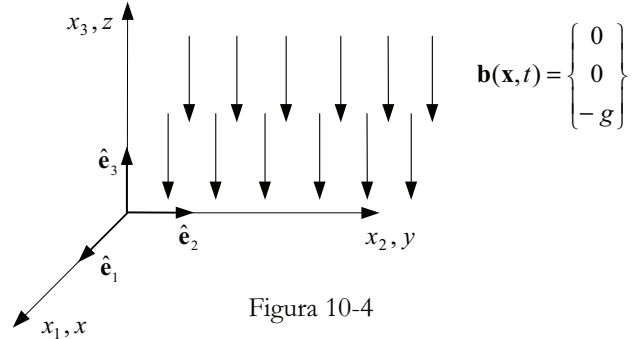


Figura 10-4

Atès que l'acceleració és nul·la (vegeu l'equació (10.20)) el problema és quasiestàtic i, sent les accions $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \equiv \text{constant}$ independents del temps, també ho són les respostes i, en particular, la pressió hidrostàtica. Per tant:

$$p_0(\mathbf{x}, t) \equiv p_0(\mathbf{x}) = p_0(x, y, z) \quad (10.26)$$

i l'equació (10.25) es pot integrar de la manera següent:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p_0(x, y, z)}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_0(x, y, z) \equiv p_0(y, z) \\ -\frac{\partial p_0(y, z)}{\partial y} = 0 \Rightarrow p_0(y, z) \equiv p_0(z) \\ -\frac{dp_0(z)}{dz} - \rho_0 g = 0 \Rightarrow p_0 = -\rho_0 g z + C \end{cases} \quad (10.27)$$

Per a un cas com el que indica la Figura 10-5, on la pressió en la superfície (cota $z = h$) es considera nul·la, la solució (10.26) queda:

$$p_0|_{z=h} = 0 \Rightarrow -\rho_0 g h + C = 0 \Rightarrow C = \rho_0 g h \Rightarrow \boxed{p_0 = \rho_0 g (h - z)} \quad (10.28)$$

que correspon a una distribució triangular de pressió, tal com es mostra en la Figura 10-5.

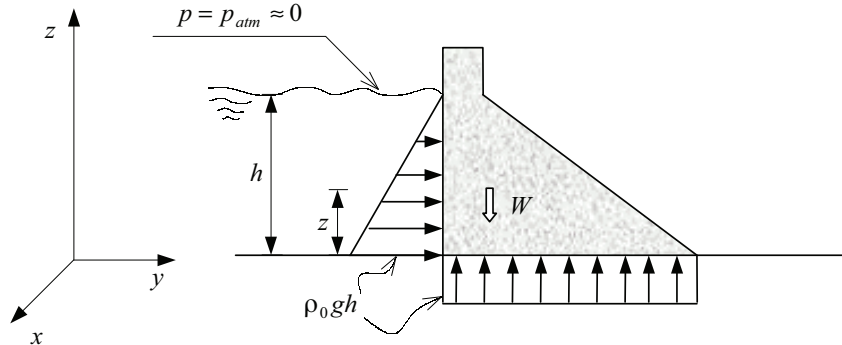


Figura 10-5 – Distribució de la pressió sobre una presa de gravetat

10.2.3 Principi d'Arquimedes

Principi d'Arquimedes

- 1) *Tot cos submergit en un fluid experimenta una empenta cap a dalt igual al pes del volum del fluid desallotjat.*

El clàssic principi es pot complementar amb:

- 2) *El resultant de l'empenta esmentada passa pel centre de gravetat del volum del fluid desallotjat.*

Per a la demostració del principi d'Arquimedes, considerem les situacions de la Figura 10-6. D'una banda, a la Figura 10-6 a es presenta un sòlid de volum V i densitat ρ a l'interior d'un fluid de densitat ρ_0 . El sòlid *no està necessàriament en equilibri*, encara que la seva velocitat i acceleració se suposen prou petites per assegurar un estat hidrostàtic en el fluid. D'altra banda, a la Figura 10-6 b, es presenta el mateix fluid sense la presència del sòlid, amb la qual cosa el volum ocupat per aquest a la Figura 10-6 a és ocupat per idèntic volum de fluid.

1) Distribució de pressió i tensió en el fluid

Utilitzant l'equació fonamental de la hidrostàtica (10.25), amb les forces gravitatòries actuant en la direcció contrària a l'eix z , es té la situació corresponent a les equacions (10.26) i (10.27), amb la qual cosa serà vàlid el resultat (10.28) per a tots dos casos a i b de la Figura 10-6:

$$\boxed{\begin{aligned} p_0(z) &= \rho_0 g (h - z) \\ \boldsymbol{\sigma} &= -p_0 \mathbf{1} \end{aligned}} \quad (10.29)$$

Cal observar que la pressió hidrostàtica i l'estat tensional en el fluid, per a punts homòlegs del fluid en els casos *a* i *b* de la Figura 10-6, seran els mateixos.

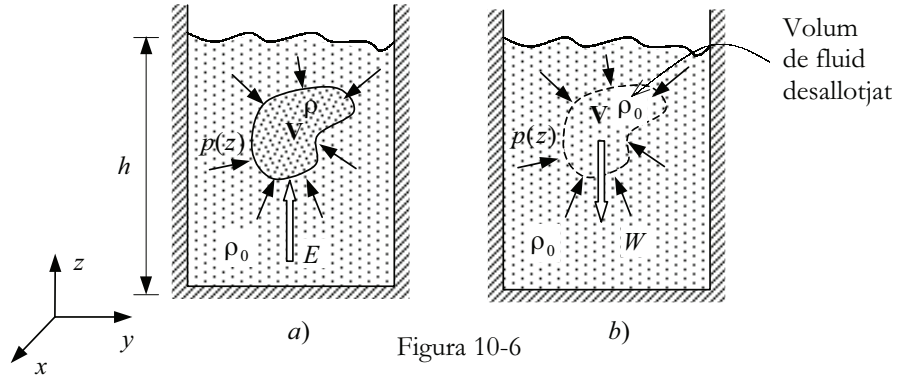


Figura 10-6

2) Empenta sobre el sòlid submergit

El vector tracció sobre els punts del contorn del sòlid submergit en la Figura 10-6 *a*) serà:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{1} \cdot \mathbf{n} = -p_0 \mathbf{n} \quad (10.30)$$

i el resultant \mathbf{R} de les forces que el fluid exerceix sobre el sòlid:

$$\mathbf{R} = \int_{\partial V} \mathbf{t} dS = \int_{\partial V} -p_0 \mathbf{n} dS \quad (10.31)$$

Cal observar ara que, en tractar-se de la mateixa distribució de pressió hidrostàtica, la resultant esmentada serà la mateixa que s'obtindria en el cas *b*) per a les forces que la resta del fluid exerceix *sobre el volum de fluid desallotjat*, amb la particularitat que, en tractar-se en el cas esmentat d'una distribució espacialment contínua de la pressió p_0 es pot aplicar el teorema de la divergència (teorema de Stokes) en l'equació (10.30) amb el resultat següent:

$$\mathbf{R} = \int_{\partial V} -p_0 \mathbf{n} dS = \int_V -\nabla p_0 dV \quad (10.32)$$

i substituint l'equació (10.25) en la (10.32):

$$\mathbf{R} = \int_V -\nabla p_0 dV = \int_V -\rho_0 \mathbf{b} dV = - \underbrace{\int_V \rho_0 \mathbf{b} dV}_{W \hat{\mathbf{e}}_z} = W \hat{\mathbf{e}}_z = E \hat{\mathbf{e}}_z \quad (10.33)$$

on E és l'empenta cap a dalt sobre el sòlid submergit i W és el pes del volum del fluid desallotjat (vegeu la Figura 10-6 *b*)).

És a dir:

$$\underbrace{\text{Empenta cap a dalt}}_{\mathbf{E}} = \underbrace{\text{pes del volum del fluid desallotjat}}_{\mathbf{W}} \quad (10.34)$$

amb la qual cosa queda demostrada la primera part del teorema d'Arquimedes.

3) Recta d'aplicació de l'empenta

Considerem ara el moment \mathbf{M}_E^G de l'empenta E respecte al centre de gravetat, G , del volum de fluid desallotjat (vegeu la Figura 10-7):

NOTA

Sense pèrdua de generalitat, es pot suposar que l'origen del sistema d'eixos cartesianes està situat a G .

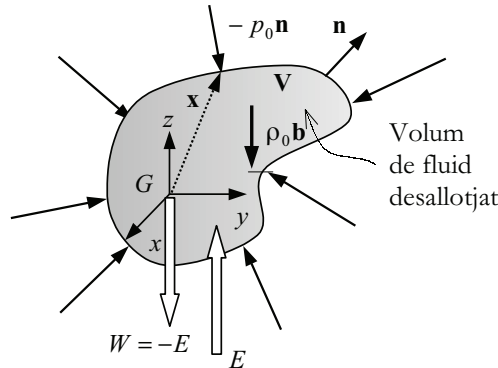


Figura 10-7

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{M}_E^G &= \int_{\partial V} \mathbf{x} \times (-p_0 \mathbf{n}) dS \stackrel{\text{Teorema de la divergència}}{=} \int_V \mathbf{x} \times (-p_0 \nabla) dV = - \int_V \mathbf{x} \times \nabla p_0 dV \\ [\mathbf{M}_E^G]_i &= - \int_{\partial V} e_{ijk} x_j p_0 n_k dS = - \int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (e_{ijk} x_j p_0) dV = \\ &= - \int_V e_{ijk} \frac{\partial x_j}{\partial x_k} p_0 dV - \int_V e_{ijk} x_j \frac{\partial p_0}{\partial x_k} dV = - \int_V \underbrace{e_{ijk} \delta_{jk}}_{e_{ij0}} p_0 dV - \\ &\quad - \int_V e_{ijk} x_j \frac{\partial p_0}{\partial x_k} dV = - \int_V e_{ijk} x_j \frac{\partial p_0}{\partial x_k} dV \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right. \quad (10.35)$$

i substituint l'equació fonamental de la hidrostàtica (10.25) ($\nabla p_0 = \rho_0 \mathbf{b}$), en l'equació (10.35), resulta finalment:

$$\mathbf{M}_E^G = - \int_V (\mathbf{x} \times \nabla p_0) dV = - \underbrace{\int_V (\mathbf{x} \times \rho_0 \mathbf{b}) dV}_{\mathbf{M}_W^G} = -\mathbf{M}_W^G = \mathbf{0} \quad (10.36)$$

on \mathbf{M}_W^G és el moment del pes del fluid desallotjat respecte al seu centre de gravetat G , el qual, per definició de centre de gravetat, és nul. En conseqüència el moment de l'empenta E respecte al centre de gravetat del volum de fluid desallotjat és també nul i es pot concloure que la recta d'aplicació de l'empenta passa pel centre de gravetat esmentat, tal com estableix la segona part del principi d'Arquimedes.

Exemple 10-1 Aplicació a l'estudi d'equilibri de sòlids en flotació. Equilibri estable i inestable.

Considerem un medi en flotació, en equilibri, i les dues situacions següents:

- a) El centre de gravetat del sòlid (centre de carena) està per sota del centre de gravetat del fluid desallotjat (centre d'empenta), vegeu la Figura 10-8:

En aquest cas, qualsevol pertorbació (inclinació) tendeix a crear un moment $M = Wd$ de sentit recuperador cap a l'estat d'equilibri inicial. Es tracta d'*equilibri estable*.

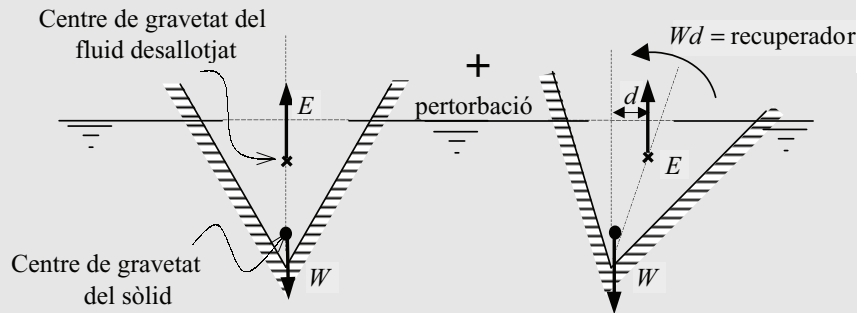


Figura 10-8 – Equilibri en flotació estable

- b) El centre de gravetat del sòlid (centre de carena) està per sobre del centre de gravetat del fluid desallotjat (centre d'empenta) (vegeu la Figura 10-9):

En aquest cas, qualsevol pertorbació (inclinació) tendeix a crear un moment de sentit bolcador $M = Wd$ que allunya el sòlid flotant de l'estat d'equilibri inicial. Es tracta d'*equilibri inestable*.

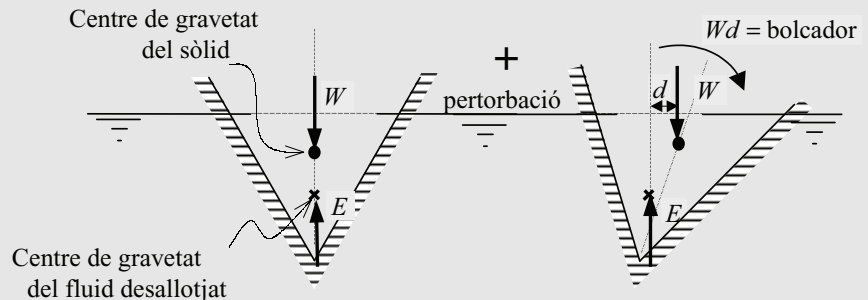


Figura 10-9 – Equilibri en flotació inestable

La col·locació de *masses pesants* (llasts) a la quilla dels vaixells respon a la recerca d'una millora en l'estabilitat en flotació d'aquests.

10.3 Dinàmica de fluids: fluids perfectes barotròpics

En el cas més comú, la velocitat no és ni uniforme ni estacionària ($\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$), per la qual cosa, en general, l'acceleració no serà nul·la ($\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \neq \mathbf{0}$). Tampoc seran nuls, per tant, ni la divergència de la velocitat ($\nabla \cdot \mathbf{v} \neq 0$) ni el tensor gradient de la velocitat ($\nabla \otimes \mathbf{v} = \overset{\text{not}}{\nabla} \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$).

Definició*Fluid perfecte*

Fluid newtonià caracteritzat perquè les viscositats λ i μ (vegeu l'equació (10.14)) són nul·les.

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d} \\ \lambda &= \mu = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \boxed{\Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1}} \quad (10.37)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p \\ \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = -p\mathbf{1} : \mathbf{d} = -p \text{Tr}(\mathbf{d}) \end{cases}$$

NOTA

No s'ha de confondre un estat tensional del tipus hidrostàtic (tensor de tensions esfèric) amb un règim de moviment hidrostàtic (velocitat nul·la o uniforme).

i l'estat tensional per a un fluid perfecte és del tipus hidrostàtic.

Definició*Fluid barotròpic*

La temperatura no intervé en l'equació cinètica d'estat (10.9).

$$F(\rho, p, \theta) \equiv F(\rho, p) = 0 \Rightarrow \rho = \rho(p)$$

10.3.1 Equacions del problema

Tenint en compte les hipòtesis de fluid perfecte i barotròpic, les equacions de la dinàmica de fluids esdevenen:

a) **Problema mecànic**1) *Equació de continuïtat*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.38)$$

2) *Balanç de la quantitat de moviment* (equació d'Euler)

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3 \text{ equacions}) \quad (10.39)$$

3) *Equació cinètica d'estat*

$$\rho = \rho(p) \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.40)$$

Es tracta d'un problema amb cinc equacions i cinc incògnites (ρ, \mathbf{v}, p) que es pot resoldre de forma desacoblada del problema tèrmic.

b) **Problema tèrmic**1) *Llei de Fourier*

$$\mathbf{q} = -k\nabla\theta \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q} = -k\nabla \cdot (\nabla\theta) = -k\nabla^2\theta \quad (3 \text{ equacions}) \quad (10.41)$$

2) *Equació de l'energia*

$$\rho \frac{du}{dt} = - \underbrace{p\nabla \cdot \mathbf{v}}_{\boldsymbol{\sigma}:\mathbf{d}} + \rho r + \underbrace{k\nabla^2\theta}_{-\nabla \cdot \mathbf{q}} \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.42)$$

3) *Equació calòrica d'estat*

$$u = u(\rho, \theta) \quad (1 \text{ equació}) \quad (10.43)$$

Es tracta d'un problema de cinc equacions amb cinc incògnites $(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t), \theta(\mathbf{x}, t), u(\mathbf{x}, t))$ que es pot calcular *una vegada resolt el problema mecànic* i conegut el camp de velocitats $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, de densitat $\rho(\mathbf{x}, t)$ i de pressió $p(\mathbf{x}, t)$.

Observació 10-2

Un format general del problema de mecànica de fluids inclou la conductivitat tèrmica k entre les viscositats (en un sentit generalitzat) del problema. La definició d'un *fluid perfecte* com un *fluid sense viscositat* suposa, en aquest context, l'anul·lació de la conductivitat tèrmica ($k = 0$), amb la qual cosa l'equació (10.41) condueix a $\mathbf{q} = -k\nabla\theta = \mathbf{0}$ i el problema tèrmic es redueix a les equacions (10.42) i (10.43).

10.3.2 Resolució del problema mecànic sota forces màssiques potencials. Trinomi de Bernoulli

Considerem ara el problema mecànic per al cas particular de *forces màssiques potencials* (les forces màssiques deriven d'un potencial ϕ):

$$\boxed{\text{Forces màssiques potencials} \rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = -\nabla\phi(\mathbf{x}, t)} \quad (10.44)$$

Per al cas particular d'un potencial gravitatori amb l'eix d'actuació de la gravetat actuant en el sentit oposat a l'eix z es té:

$$\phi(x, y, z, t) = gz \Rightarrow \mathbf{b} = -\nabla\phi \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (10.45)$$

Observació 10-3

Lema 1

Per a un fluid barotròpic ($\rho = \rho(p)$) existeix una funció $\mathbb{P}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbb{P}}(p(\mathbf{x}, t))$, que compleix:

$$\boxed{\nabla p = \rho \nabla \mathbb{P}}$$

Demostració

Definint la funció $\mathbb{P}(\mathbf{x}, t)$ mitjançant:

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbb{P}}(p(\mathbf{x}, t)) = \int_0^p \frac{1}{\rho(\bar{p})} d\bar{p} \quad (10.46)$$

es complirà:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{P}(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} &= \frac{\partial \hat{\mathbb{P}}}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x_i} \\ [\nabla \mathbb{P}]_i &= \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbb{P}}}{\partial p}}_{\frac{1}{\rho(p)}} [\nabla p]_i = \frac{1}{\rho(p)} [\nabla p]_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla \mathbb{P} = \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (10.47)$$

Observació 10-4

Lema 2

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

on $2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ és el vector vorticitat.

Demostració

RECORDATORI

Es fan servir aquí els següents resultats obtinguts anteriorment (vegeu el capítol 2)

$$a) w_{ji} = -w_{ij} =$$

$$= [\nabla^a \mathbf{v}]_{ji} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]$$

$$b) w_{ij} = -e_{ijk} \omega_k$$

$$c) v^2 = |\mathbf{v}|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v})_j &= v_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} = v_i \underbrace{\left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right]}_{2w_{ji}} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \\ &= 2v_i \underbrace{w_{ji}}_{-w_{ij}} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -2v_i w_{ij} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 2 \underbrace{e_{ijk} v_i \omega_k}_{e_{jki} v_i \omega_k} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \\ &= 2 \underbrace{e_{jki} v_i \omega_k}_{[2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}]_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \underbrace{v_i v_i}_{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2} \right) = [2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}]_j + \left[\nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \right]_j \quad j \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (10.48)$$

$$\boxed{\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right)}$$

Considerant ara l'equació d'Euler (10.39):

$$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{b} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (10.49)$$

i substituint les equacions (10.45) i (10.47) en l'equació (10.49):

$$-\nabla \mathbb{P} - \nabla \phi = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} v^2 \right) \quad (10.50)$$

on s'ha tingut en compte el resultat (10.48). L'equació (10.50) es pot reescriure ara com:

$$-\left[\nabla\mathbb{P} + \nabla\phi + \nabla\left(\frac{1}{2}v^2\right)\right] = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \Rightarrow \quad (10.51)$$

Equació de moviment per a un fluid perfecte barotròpic sota forces màssiques potencials	$\rightarrow -\nabla\left[\underbrace{\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}v^2}_{\text{Trinomi de Bernouilli}}\right] = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$	(10.52)
---	---	---------

L'equació (10.52) és la forma particular que adopta el balanç de la quantitat de moviment (equació d'Euler (10.39)) per a fluids perfectes, barotròpics sota forces màssiques potencials.

10.3.3 Solució en règim estacionari

La resolució del problema mecànic (10.38) a (10.40) tindrà en general un *règim transitori* en el qual la descripció espacial de les variables mecàniques evoluciona amb el temps, i un *règim estacionari*, en el qual la descripció espacial esmentada és, aproximadament, constant al llarg del temps (vegeu la Figura 10-10).

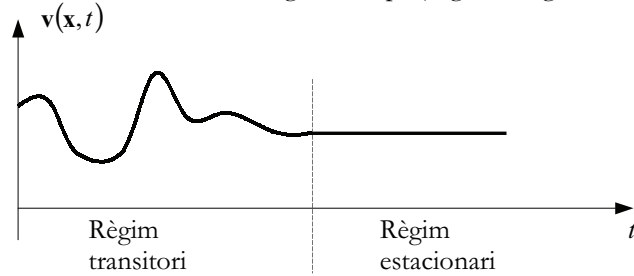


Figura 10-10 – Règim transitori i estacionari

Considerem ara l'equació del moviment (10.52) en *règim estacionari*:

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad -\nabla\left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2}v^2\right] = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (10.53)$$

i una línia de corrent $\Gamma: \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ parametritzada en funció de la seva longitud d'arc s (vegeu la Figura 10-11). Projectant (multiplicant) l'equació (10.51) en la direcció de la tangent \mathbf{t} a la línia de corrent, tindrem:

RECORDATORI

En règim estacionari les trajectòries i les línies de corrent coincideixen.

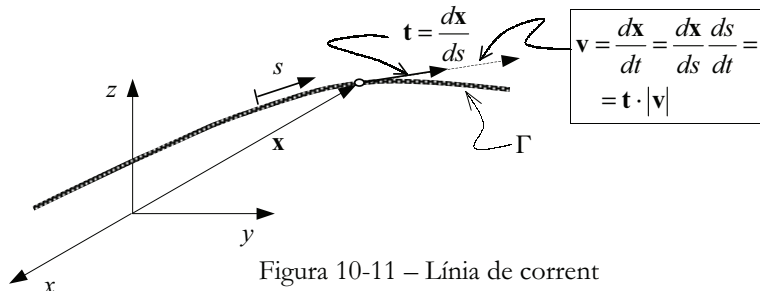


Figura 10-11 – Línia de corrent

$$-\underbrace{\nabla \left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right]}_{M(\mathbf{x})} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad -(\nabla M) \cdot \underbrace{\frac{d\mathbf{x}}{ds} \frac{ds}{dt}}_{=\mathbf{0}} = \underbrace{(2\mathbf{w} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}}_{=0} = 0 \Rightarrow \quad (10.54)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla M(\mathbf{x}(s)) \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds} &= \frac{dM}{ds} = 0 \\ \frac{\partial M(\mathbf{x}(s))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} &= \frac{dM}{ds} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \Rightarrow \quad \boxed{M(\mathbf{x}) = \text{constant} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma} \quad (10.55)$$

i l'equació (10.55) es pot escriure:

$$\boxed{\left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right](\mathbf{x}) = \text{constant} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma} \quad (10.56)$$

que estableix que *el trinomi de Bernoulli roman constant sobre una mateixa línia de corrent* Γ .

Observació 10-5

Cal observar ara que l'equació (10.56) ja no és una equació diferencial, sinó una equació (escalar) algebraica ja integrada. L'equació esmentada permet, per tant, obtenir una de les incògnites del problema mecànic conegudes les altres.

10.3.3.1 Solució en règim estacionari per a fluid incompressible i forces màssiques gravitatòries

Considerem ara el cas particular de fluid barotròpic que s'esdevé quan:

a) $\boxed{\text{El fluid és incompressible}}$

$$\rho = \rho(p) = \rho_0 = \text{constant} \quad (10.57)$$

En aquest cas la funció $\mathbb{P}(p)$ de l'equació (10.46) es pot integrar, resultant:

$$\mathbb{P}(\mathbf{x}, t) = \int_0^p \frac{1}{\rho(\bar{p})} d\bar{p} = \frac{1}{\rho_0} \int_0^p d\bar{p} = \frac{p}{\rho_0} \quad (10.58)$$

b) $\boxed{\text{Les forces màssiques potencials són del tipus gravitatori}}$

D'acord amb l'equació (10.45):

$$\phi = gz \quad \mathbf{b} = -\nabla \phi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (10.59)$$

Substituint les equacions (10.58) i (10.59) en l'expressió del trinomi de Bernoulli (10.56), es té:

$$\frac{p}{\rho_0} + gz + \frac{1}{2} v^2 = \text{constant} \quad \Rightarrow \quad z + \frac{p}{\rho_0 g} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \stackrel{\text{def}}{=} H = \text{constant} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \quad (10.60)$$

Els termes de l'equació (10.59) tenen dimensions de longitud (alçària) i es poden interpretar com:

Teorema de Bernoulli				
z	+	$\frac{p}{\rho_0 g}$	+	$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g}$
Alçària geomètrica		Alçària piezomètrica		Alçària energètica
				$\stackrel{def}{=} H = constant \forall \mathbf{x} \in \Gamma$
				Alçària total

(10.61)

RECORDATORI

La paraula *piezomètrica* prové del prefix *piezo* = “pressió”.

Observació 10-6

Teorema de Bernoulli

L'equació (10.61) constitueix l'anomenat teorema de Bernoulli (per a un fluid perfecte, incompressible, sota càrregues gravitatòries i en règim estacionari) que estableix que *l'alçària geomètrica més l'alçària piezomètrica més l'alçària energètica és constant en tots els punts d'una mateixa línia de corrent* (vegeu la Figura 10-2).

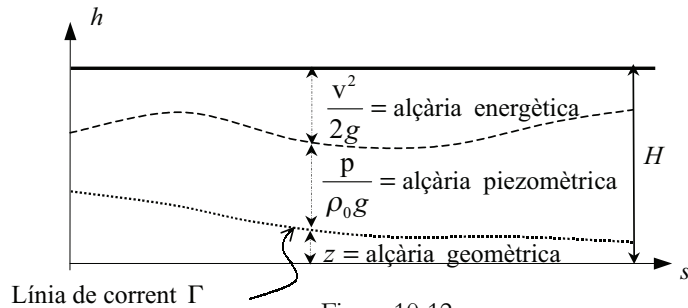


Figura 10-12

Observació 10-7

L'aigua és considerada generalment en enginyeria un fluid perfecte i incompressible, i la ciència que l'estudia es denomina *hidràulica*. Atès que, en general les forces màssiques són de tipus gravitatori, el teorema de Bernoulli és aplicable en general en la *resolució de problemes estacionaris en hidràulica*.

Exemple 10-2 Per al dipòsit d'aigua de la figura, calculeu la velocitat d'abocament, en règim estacionari, per un petit orifici lateral situat a una distància h del nivell superior d'aigua.

Resolució

Es tracta d'un fluid perfecte i incompressible en règim estacionari sota càrrega gravitatòria i és, per tant, aplicable el teorema de Bernoulli. Considerem una línia de corrent que va des d'un cert punt **A**, de la superfície, al punt **B** de l'orifici de sortida (vegeu la (Figura 10-13)).

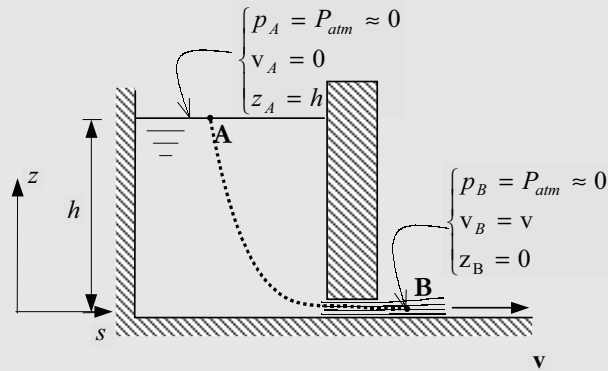


Figura 10-13

Aplicant el teorema de Bernoulli entre els punts **A** i **B** (tenint en compte que la velocitat en la superfície lliure del dipòsit és pràcticament nul·la, si el seu diàmetre és molt més gran que el de l'orifici de sortida, i menyspreant la pressió atmosfèrica $P_{atm} \approx 0$):

$$\begin{aligned} z_A + \frac{p_A}{\rho_0 g} + \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{g} &= z_B + \frac{p_B}{\rho_0 g} + \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{g} \\ = h + 0 + 0 &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{g} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \end{aligned}$$

10.3.4 Solució en règim transitori

En règim transitori les variables mecàniques (la seva descripció espacial) depenen del temps (vegeu la Figura 10-10). El punt de partida per a la resolució del problema serà l'equació de balanç de la quantitat de moviment (10.52):

$$-\nabla \left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \quad (10.62)$$

En alguns casos la solució de l'equació esmentada en règim transitori és particularment senzilla. A continuació es veuran alguns dels casos esmentats.

10.3.4.1 Flux potencial (irrotacional)

Es considera el cas de:

- fluid perfecte
- forces massiques potencials
- flux irrotacional.

Definició

Flux irrotacional

Es diu que el moviment (flux) d'un cert fluid és irrotacional (o potencial) si el rotacional del camp de velocitats és nul en qualsevol punt d'aquest.

En altres paraules, per a un flux irrotacional el vector vorticitat és nul:

$$\text{Flux irrotacional} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \end{array} \right\} \forall \mathbf{x} \quad \forall t \quad (10.63)$$

Si el flux és irrotacional, de l'equació (10.63) s'infereix que existeix una funció escalar (denominada potencial de velocitats $\chi(\mathbf{x}, t)$) que compleix:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \chi(\mathbf{x}, t) \quad (10.64)$$

Cal observar que, en aquest cas, el camp *vectorial* $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ queda determinat en funció del potencial *escalar* de velocitats $\chi(\mathbf{x}, t)$ (que passa a ser la incògnita primal del problema). Substituint les condicions (10.63) i (10.64) en l'equació (10.62) s'obté:

$$-\nabla \left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 \right] = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + 2 \underbrace{\boldsymbol{\omega}}_{=\mathbf{0}} \times \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \chi(\mathbf{x}, t)) = \nabla \left(\frac{\partial \chi}{\partial t} \right) \Rightarrow \quad (10.65)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \nabla \left[\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} \right] = \nabla M(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0} \\ \frac{\partial M(\mathbf{x}, t)}{\partial x_i} = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t \quad (10.66)$$

equació que es pot integrar trivialment i arribar a:

$$M(\mathbf{x}, t) = \mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 + \frac{\partial \chi}{\partial t} = \varphi(t) \quad (10.67)$$

Definint un potencial de velocitats modificat $\bar{\chi}(\mathbf{x}, t)$ de la forma:

$$\bar{\chi}(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \chi(\mathbf{x}, t) - \int_0^t \varphi(\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \bar{\chi} = \nabla \chi = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = \frac{\partial \chi}{\partial t} - \varphi(t) \end{array} \right. \quad (10.68)$$

i substituint les equacions (10.68) en la (10.67):

$$\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} v^2 + \underbrace{\frac{\partial \chi}{\partial t}}_{\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t}} - \varphi(t) = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\mathbb{P} + \phi + \frac{1}{2} (\nabla \bar{\chi})^2 + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t} \quad (10.69)$$

que és l'equació diferencial dels *transitoris hidràulics*.

El problema mecànic queda llavors definit per:

1) Equació de continuïtat

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d\rho}{dt} + \rho \underbrace{\nabla \cdot (\nabla \bar{\chi})}_{\nabla^2 \bar{\chi}} = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla^2 \bar{\chi} = 0} \quad (10.70)$$

NOTA

Es pot demostrar que, donat un camp vectorial $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$

irrotacional, és a dir, que compleixi

$\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, existeix una funció escalar $\chi(\mathbf{x}, t)$ (funció

potencial) tal que

$\mathbf{v} = \nabla \chi(\mathbf{x}, t)$.

Evidentment, com que

$\nabla \times \nabla(\bullet) \equiv \mathbf{0}$, es

compleix que $\nabla \times \mathbf{v} =$

$= \nabla \times \nabla \chi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$

2) *Balanç de la quantitat de moviment (equació dels transitoris hidràulics)*

$$\mathbb{P}(\rho, p) + \phi + \frac{1}{2}(\nabla \bar{\chi})^2 + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t \quad (10.71)$$

3) *Equació cinètica d'estat*

$$\rho = \rho(p) \quad (10.72)$$

que constitueixen un sistema de tres equacions escalars amb tres incògnites ($p(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$ i $\bar{\chi}(\mathbf{x}, t)$) que es pot integrar en un domini de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. Una vegada conegut el potencial $\bar{\chi}(\mathbf{x}, t)$ es pot calcular el camp de velocitats mitjançant:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \nabla \bar{\chi}(\mathbf{x}, t) \quad (10.73)$$

10.3.4.2 Flux potencial i incompressible

Es considera ara el cas de:

- fluid perfecte
- forces màsiques potencials
- flux irrotacional (potencial)
- flux incompressible

En tractar-se d'un flux incompressible de les equacions (10.46) i (10.70):

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \rho = \rho_0 \rightarrow \begin{cases} \mathbb{P}(p) = \int_0^p \frac{1}{\rho(\bar{p})} d\bar{p} = \frac{p}{\rho_0} \\ \nabla^2 \bar{\chi} = \Delta \bar{\chi} = 0 \end{cases} \quad (10.74)$$

i les equacions del problema mecànic (10.70) a (10.72) resulten ser:

1) *Equació de continuïtat*

$$\Delta \bar{\chi} = \frac{\partial^2 \bar{\chi}}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \quad (10.75)$$

2) *Balanç de la quantitat de moviment (equació dels transitoris hidràulics)*

$$\frac{p}{\rho_0} + \phi + \frac{1}{2}(\nabla \bar{\chi})^2 + \frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \quad \forall t \quad (10.76)$$

que constitueixen un sistema de *dues equacions* escalars amb dues incògnites ($p(\mathbf{x}, t)$ i $\bar{\chi}(\mathbf{x}, t)$) que es pot integrar en un domini de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$. En règim

NOTA

Es defineix aquí l'operador diferencial *laplaciana* de (\bullet) com:

$$\begin{aligned} \Delta(\bullet) &= \nabla \cdot \nabla(\bullet) = \\ &= \nabla^2(\bullet) = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_i \partial x_i} \end{aligned}$$

estacionari el terme $\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial t} = 0$ i desapareix qualsevol derivada temporal en el sistema, per la qual cosa aquest es pot integrar en \mathbb{R}^3 .

10.4 Dinàmica de fluids: fluids viscosos (newtonians)

Considerem ara el problema general descrit per les equacions (10.1) a (10.9):

<i>Continuïtat</i>	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$	(1 eq.)	(10.77)
<i>Balanç de la quantitat de moviment</i>	$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	(3 eq.)	(10.78)
<i>Balanç d'energia</i>	$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q}$	(1 eq.)	(10.79)
<i>Equació constitutiva mecànica</i>	$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}$	(6 eq.)	(10.80)
<i>Equació constitutiva de l'entropia</i>	$s = s(\mathbf{d}, \theta, \rho)$	(1 eq.)	(10.81)
<i>Equació de conducció de la calor</i>	$\mathbf{q} = -k \nabla \theta$	(3 eq.)	(10.82)
<i>Equació calòrica d'estat</i>	$u = u(\rho, \theta)$	(1 eq.)	(10.83)
<i>Equació cinètica d'estat</i>	$F(\rho, p, \theta) = 0$	(1 eq.)	(10.84)

Taula 10-1 Equacions del problema de mecànica de fluids

que constitueixen un sistema amb 17 equacions i 17 incògnites. El sistema esmentat és massa gran per ser tractat eficaçment i es planteja trobar un sistema d'equacions reduït que permeti una resolució més simple.

10.4.1 Equació de Navier-Stokes

Essencialment és l'equació del moviment (10.78) expressada únicament en funció del camp de velocitats $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ i de pressió $p(\mathbf{x}, t)$.

Observació 10-8

Lema 1

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v})$$

on $\mathbf{d}(\mathbf{x}, t)$ és el tensor velocitat de deformació.

Demostració

$$\left. \begin{aligned}
 [\nabla \cdot \mathbf{d}]_j &= \frac{\partial}{\partial x_i} d_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\frac{\partial v_i}{\partial x_i}}_{\nabla \cdot \mathbf{v}} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_i}}_{[\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})]_j} = \\
 &= \left[\frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \right]_j \quad j \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (10.85)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{d} = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v})} \quad (10.86)$$

Observació 10-9

Lema 2

Donada una funció escalar $\alpha(\mathbf{x}, t)$, es compleix:

$$\boxed{\nabla \cdot (\alpha \mathbf{1}) = \nabla \alpha}$$

Demostració

$$[\nabla \cdot (\alpha \mathbf{1})]_i = \frac{\partial (\alpha \delta_{ij})}{\partial x_j} = \delta_{ij} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = [\nabla \alpha]_i \quad i \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow \quad (10.87)$$

$$\boxed{\nabla \cdot (\alpha \mathbf{1}) = \nabla \alpha} \quad (10.88)$$

Substituint l'equació constitutiva (10.80) en l'equació (10.78) i tenint en compte les equacions (10.86) i (10.88):

$$\left. \begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= -p \mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d} \\
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{aligned}
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= -\nabla p + \lambda \underbrace{\nabla(\text{Tr}(\mathbf{d}))}_{\nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}]} + \mu \Delta \mathbf{v} + \mu \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] \\
 \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} &= -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}
 \end{aligned} \right. \quad (10.89)$$

Equacions de Navier - Stokes

$$\left\{ \begin{aligned}
 -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} &= \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\
 -\frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_j} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho b_i &= \rho \frac{dv_i}{dt} \quad i \in \{1, 2, 3\}
 \end{aligned} \right. \quad (10.90)$$

10.4.2 Equació de l'energia

Es tracta d'eliminar $\boldsymbol{\sigma}$ i \mathbf{q} de l'equació (10.79) substituint en aquesta les equacions (10.80) i (10.82). Per a això cal recordar l'expressió de la potència tensional per a un fluid newtonià (vegeu el capítol 9):

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} = W_R + 2W_D = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathcal{K} Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \quad (10.91)$$

on \mathbf{d}' és la part desviadora del tensor velocitat de deformació, i la llei de Fourier:

$$\mathbf{q} = -k \nabla \theta \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{q} = -\nabla \cdot (k \nabla \theta) \quad (10.92)$$

Substituint ara en l'equació (10.79), s'obté:

$$\rho \frac{du}{dt} = \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{d} + \rho r - \nabla \cdot \mathbf{q} \Rightarrow \quad (10.93)$$

Equació de l'energia

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{du}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r + \nabla \cdot (k \nabla \theta) + \overbrace{\mathcal{K} Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'}^{2W_D} \\ \rho \frac{du}{dt} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \rho r + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right) + \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 + 2\mu d'_{ij} d'_{ij} \end{array} \right. \quad (10.94)$$

10.4.3 Equacions de govern del problema de mecànica de fluids

Considerant les versions simplificades del balanç de la quantitat de moviment (equacions de Navier-Stokes (10.90) i de l'energia (10.94)) el problema de la Taula 10-1 es pot reduir al de la Taula 10-2, que constitueixen un sistema de set EDP amb set incògnites ($\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$, $u(\mathbf{x}, t)$, $\theta(\mathbf{x}, t)$) que s'ha de resoldre en un domini de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+$.

Continuïtat	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$	(1 eq.)	(10.95)
Balanç de la quantitat de moviment (Navier-Stokes)	$-\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	(3 eq.)	(10.96)
Balanç d'energia	$\rho \frac{du}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r + \nabla \cdot (k \nabla \theta) + \mathcal{K} Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'$	(1 eq.)	(10.97)
Equació calòrica d'estat	$u = u(\rho, \theta)$	(1 eq.)	(10.98)
Equació cinètica d'estat	$F(\rho, p, \theta) = 0$	(1 eq.)	(10.99)

Taula 10-2 Equacions de govern del problema de mecànica de fluids

Per al cas particular de *règim barotròpic* ($\rho = \rho(p)$) es pot desacoblar la part mecànica de la part tèrmica en les equacions (10.77) a (10.84), resultant el

problema mecànic de la Taula 10-3 amb cinc equacions i cinc incògnites ($\rho(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $p(\mathbf{x}, t)$).

Continuïtat	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$	(1 eq.) (10.100)
Balanç de la quantitat de moviment (Navier-Stokes)	$-\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$	(3 eq.) (10.101)
Equació cinètica d'estat	$\rho = \rho(p)$	(1 eq.) (10.102)

Taula 10-3 Equacions del problema mecànic per a règim barotròpic

10.4.4 Interpretació física de les equacions de Navier-Stokes i de l'energia

Considerem les equacions de Navier-Stokes (10.90):

$$\begin{cases} -\nabla p + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} \\ -\frac{\partial p}{\partial x_i} + [(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v}]_i + \rho b_i - \rho a_i = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\} \end{cases} \quad (10.103)$$

Cada un dels termes de l'equació (10.103) es pot entendre com un component d'un sistema de forces (per unitat de volum) que actua sobre un diferencial de volum del fluid en moviment:

$$\underbrace{-\nabla p}_{\text{Forces degudes al gradient de pressions}} - \underbrace{[(\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta \mathbf{v}]}_{\text{Forces viscoses exercides per contacte entre partícules (=0 quan \lambda=\mu=0)}} + \underbrace{\rho \mathbf{b}}_{\text{Forces màssiques}} + \underbrace{-\rho \mathbf{a}}_{\text{Forces d'inèrcia}} = \mathbf{0} \quad (10.104)$$

A la Figura 10-4 es pot apreciar la projecció en la direcció x_i de cada un dels components esmentats.

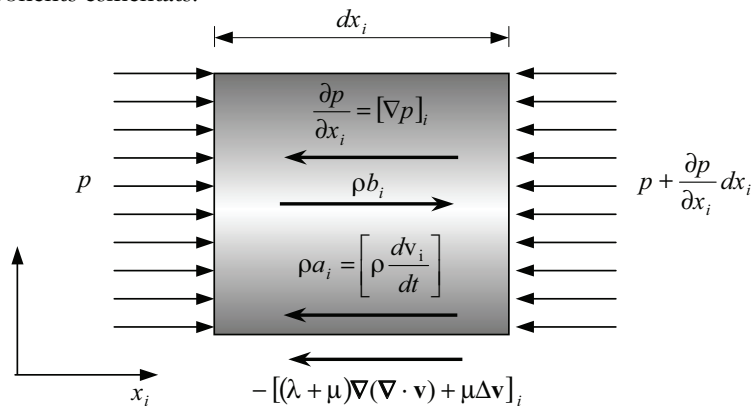


Figura 10-14

L'equació de l'energia (10.94) també es pot interpretar com s'indica a la Taula 10-4.

RECORDATORI

$$\frac{d(dV)}{dt} = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV$$

(vegeu el capítol 2, apartat 2.14.3).

$\rho \frac{du}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r + \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta) + \overbrace{\mathcal{K} \text{Tr}^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'}^{2W_D}$	
$\rho \frac{du}{dt}$	= $\frac{\text{Variació d'energia interna}}{\text{u. de volum} \cdot \text{u. de temps}}$
$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{d(dV)}{dV}$	= $\frac{\text{Variació de volum}}{\text{u. de volum} \cdot \text{u. de temps}}$
$-p \nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{p d(dV)}{dV}$	= $\frac{\text{Treball mecànic de la pressió termodinàmica}}{\text{u. de volum} \cdot \text{u. de temps}}$ (vegeu la Figura 10-15)
$\rho r + \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta)$	= $\frac{\text{Calor generada per les fonts internes i la conducció}}{\text{u. de volum} \cdot \text{u. de temps}}$
$2W_D = \sigma_D : \mathbf{d}$	= Pot. dissipativa = $\frac{\text{Treball mecànic de les forces viscoses}}{\text{u. de volum} \cdot \text{u. de temps}}$

Taula 10-4 Interpretació física de l'equació de l'energia

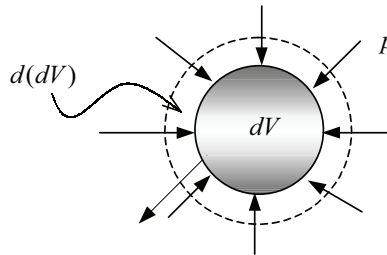


Figura 10-15

10.4.5 Reducció del problema general a casos particulars

Les equacions de govern de la mecànica de fluids de la Taula 10-2 es poden simplificar per a certs casos que són de particular interès en l'enginyeria.

10.4.5.1 Fluids incompressibles

En aquest cas passa:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= 0 \\ \frac{dp}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho_0 = \text{constant} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = \text{Tr}(\mathbf{d}) = 0 \end{cases} \quad (10.105)$$

i substituint les equacions (10.105) a la Taula 10-2 s'obtenen les equacions de govern de la Taula 10-5.

Problema mecànic	<i>Continuïtat</i>	$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
	<i>Equacions de Navier-Stokes</i>	$-\nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho_0 \mathbf{b} = \rho_0 \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
Problema tèrmic	<i>Balanç d'energia</i>	$\rho_0 \frac{du}{dt} = \rho_0 r + \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'$
	<i>Equació calòrica d'estat</i>	$u = u(\rho_0, \theta)$
<i>Equació constitutiva</i>		$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}$

Taula 10-5 Fluids newtonians incompressibles. Equacions de govern

10.4.5.2 Fluids amb viscositat volumètrica nul·la (fluids de Stokes)

En aquest cas:

$$\mathcal{K} = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu \Rightarrow \lambda + \mu = \frac{1}{3}\mu \tag{10.106}$$

$$2W_D = \underbrace{\mathcal{K}}_{=0} Tr^2(\mathbf{d}) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' = 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}' \tag{10.107}$$

i substituint les equacions (10.106) i (10.107) a la Taula 10-2 s'obtenen les equacions de govern de la Taula 10-6.

<i>Continuïtat</i>	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
<i>Equacions de Navier-Stokes</i>	$-\nabla p + \frac{1}{3}\mu \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] + \mu \Delta \mathbf{v} + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
<i>Balanç d'energia</i>	$\rho \frac{du}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r + \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta) + 2\mu \mathbf{d}' : \mathbf{d}'$
<i>Equació calòrica d'estat</i>	$u = u(\rho, \theta)$
<i>Equació cinètica d'estat</i>	$F(\rho, p, \theta) = 0$
<i>Equació constitutiva</i>	$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1} - \frac{2}{3}\mu Tr(\mathbf{d}) \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{d}$

Taula 10-6 Fluids de Stokes. Equacions de govern

10.4.5.3 Fluids perfectes

Per a fluids perfectes (sense viscositat) $\lambda = \mu = \mathcal{K} = 0$. Substituint la condició esmentada a la Taula 10-2, s'obté el problema de la Taula 10-7.

<i>Continuïtat</i>	$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$
<i>Balanç de la quantitat de moviment (equació d'Euler)</i>	$-\nabla p + \rho \mathbf{b} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}$
<i>Balanç d'energia</i>	$\rho \frac{du}{dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \rho r$
<i>Equació calòrica d'estat</i>	$u = u(\rho, \theta)$
<i>Equació cinètica d'estat</i>	$F(\rho, p, \theta) = 0$
<i>Equació constitutiva</i>	$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{1}$

Taula 10-7 Fluids perfectes. Equacions de govern

10.4.5.4 Hidrostàtica

En aquest cas es té (vegeu les equacions (10.20)):

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} \quad ; \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad ; \quad \rho = \rho_0 \quad ; \quad p = p_0 \quad ; \quad \boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1} \quad (10.108)$$

per la qual cosa les equacions de la Taula 10-2 es redueixen a les de la Taula 10-8.

Problema mecànic	<i>Balanç de la quantitat de moviment (equació fonamental de la hidrostàtica)</i>	$-\nabla p_0 + \rho_0 \mathbf{b} = \mathbf{0}$
Problema tèrmic	<i>Balanç d'energia</i>	$\rho_0 \frac{du}{dt} = \rho_0 r + \nabla \cdot (\mathbf{k} \nabla \theta)$
	<i>Equació calòrica d'estat</i>	$u = u(\rho_0, \theta)$
<i>Equació constitutiva</i>		$\boldsymbol{\sigma} = -p_0 \mathbf{1}$

Taula 10-8 Hidrostàtica. Equacions de govern

10.5 Condicions de contorn en la mecànica de fluids

Les equacions de govern del problema de mecànica de fluids, presentades en apartats anteriors, necessiten les condicions de contorn adequades per poder ser resoltes correctament. En general, en els problemes de mecànica de fluids es fa servir la *descripció espacial* (o euleriana) i s'analitza un determinat *volum de control* (fix en l'espai), en el contorn del qual s'apliquen les condicions de contorn espacials. Encara que aquestes condicions de contorn són molt variades, i freqüentment dependents del tipus de problema, en els apartats següents es presenta un resum de les més comunes.

10.5.1 Condicions de contorn en velocitats

a) Velocitat prescrita

En certes parts $\Gamma_{\bar{v}}$ del contorn del volum de control V que s'analitza, les velocitats són conegudes (vegeu la Figura 10-16).

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\bar{v}} \quad (10.109)$$

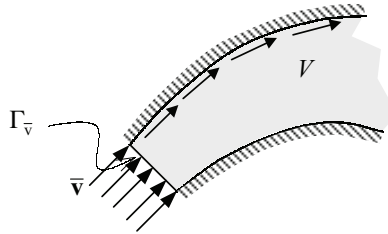


Figura 10-16 – Condicions de contorn en velocitats

b) Condició d'impenetrabilitat

Normalment, part del contorn del volum de control V està constituïda per parets impermeables, Γ_{v_n} , que se suposen impenetrables pel fluid del seu interior. L'expressió matemàtica d'aquesta situació és la denominada *condició d'impenetrabilitat*, que estableix que la velocitat relativa del fluid, \mathbf{v}_r , respecte a la paret impermeable (suposada mòbil amb velocitat \mathbf{v}^*) en la direcció normal al contorn ha de ser nul·la (vegeu la Figura 10-17):

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}_{\text{fluid}} = \underbrace{\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{n}}_{\text{paret}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{v_n} \Rightarrow \quad (10.110)$$

$$\mathbf{v}_r \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{v_n} \quad (10.111)$$

Per al cas particular de contorn fix la condició (10.111) es redueix a $(\mathbf{v}^* = 0) \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{v_n}$.

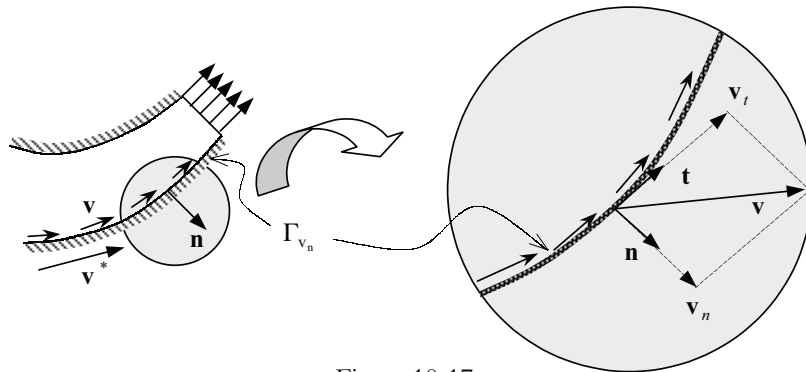


Figura 10-17

Observació 10-10

La condició d'impenetrabilitat se sol aplicar per a *fluids perfectes* (sense viscositat) en els quals se suposa que el component tangencial de la velocitat relativa fluid-paret \mathbf{v}_t (vegeu la Figura 10-17) és no nul·la.

c) **Condició d'adherència**

Si el *fluid* és *viscós* se sol imposar que, a les parets impermeables, no només s'anul·la el component normal de la velocitat relativa fluid-paret, sinó que, per efecte de la viscositat, el fluid *s'adhereix* a la paret (vegeu la Figura 10-8), per la qual cosa la velocitat relativa fluid-paret \mathbf{v}_r és nul·la:

$$\mathbf{v}_r(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v} - \mathbf{v}^* = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_v \Rightarrow \boxed{\mathbf{v} = \mathbf{v}^* \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_v} \quad (10.112)$$

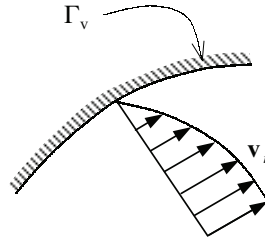


Figura 10-18

10.5.2 Condicions de contorn en traccions (o en pressions)

En certes parts Γ_σ del contorn es pot prescriure el vector de traccions $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}$ (vegeu la Figura 10-19).

$$\boxed{\mathbf{t}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma} \quad (10.113)$$

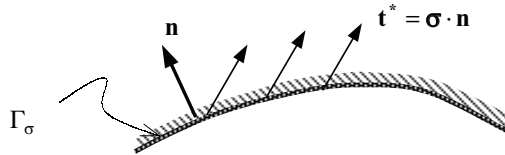


Figura 10-19

En algunes circumstàncies es prescriu només una part del vector de traccions com és la *pressió termodinàmica*. En efecte, per a un fluid newtonià tenim:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{1} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{d} \Rightarrow \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = -p\mathbf{n} + \lambda \text{Tr}(\mathbf{d})\mathbf{n} + 2\mu\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} \quad (10.114)$$

i l'equació (10.114) posa de manifest que la pressió termodinàmica P és una part del component normal del vector de traccions \mathbf{t} . La prescripció de la pressió termodinàmica sobre una part del contorn Γ_p s'escriu de la manera següent:

$$p(\mathbf{x}, t) = p^*(\mathbf{x}, t) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_p \quad (10.115)$$

10.5.3 Condicions de contorn mixtes

En certs casos (com a les seccions d'entrada o de sortida de canonades) es prescriu la pressió (una part del component *normal* de la tracció) i els components *tangencials* de la velocitat (que se suposen nuls, vegeu la Figura 10-20).

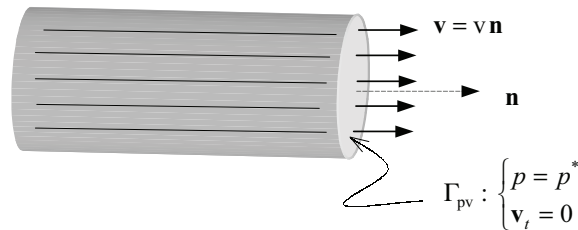


Figura 10-20

10.5.4 Condicions de contorn sobre superfícies lliures

Definició

Superfície lliure

És la superfície de contacte entre l'aire (ambient) i un fluid (generalment l'aigua).

NOTA

En general, en els problemes de mecànica de fluids en els quals apareixen superfícies lliures, la posició d'aquestes no es coneix i les característiques geomètriques de la superfície passen a ser una incògnita del problema.

Exemples de superfície lliure són la superfície del mar (vegeu la Figura 10-21) o la superfície que separa la part saturada de la no saturada en un talús o en una presa de materials solts (vegeu la Figura 10-22).

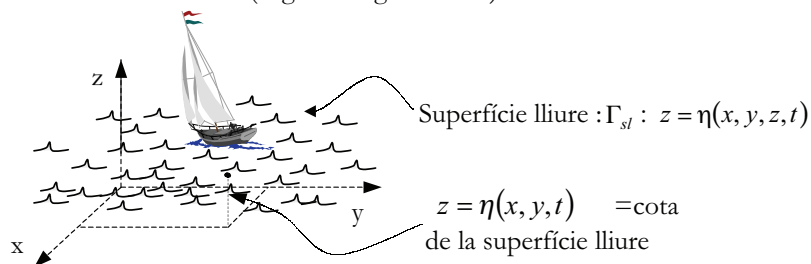


Figura 10-21 – Superfície lliure del mar

Una hipòtesi amb clar sentit físic realitzada freqüentment sobre la superfície lliure és que es tracta d'una *superfície material* (constituïda sempre per les mateixes partícules). Aquesta hipòtesi estableix implícitament certes condicions de contorn sobre el camp de velocitats a la superfície material Γ_{sl} . En efecte, considerant la superfície lliure de la Figura 10-21:

$$\Gamma_{sl} := \{\mathbf{x} \mid \phi(\mathbf{x}, y, z, t) \equiv z - \eta(\mathbf{x}, y, t) = 0\} \quad (10.116)$$

i imposant el caràcter material d'aquesta (derivada material nul·la, vegeu el capítol 1, apartat 1.11):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\phi = -\frac{\partial\eta}{\partial t} - v_x \frac{\partial\eta}{\partial x} - v_y \frac{\partial\eta}{\partial y} + v_z \underbrace{\frac{\partial\phi}{\partial z}}_{=1} = 0 \Rightarrow \quad (10.117)$$

$$\boxed{v_z(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\eta}{\partial t} + v_x \frac{\partial\eta}{\partial x} + v_y \frac{\partial\eta}{\partial y} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sl}} \quad (10.118)$$

condició que estableix una dependència del component vertical de la velocitat v_z respecte als altres components v_x i v_y .

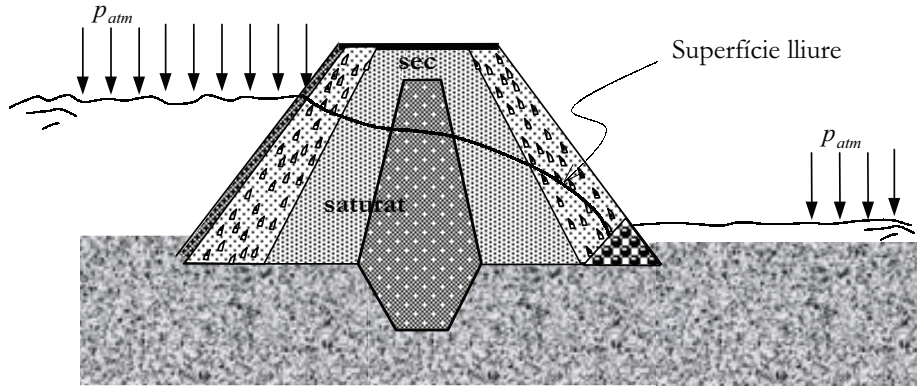


Figura 10-22 – Presa de materials solts

NOTA

En general, es negligeix el valor de la pressió atmosfèrica ($P_{atm} \approx 0$)

Una altra condició de contorn freqüentment establerta sobre les superfícies lliures és que en aquestes la pressió termodinàmica és coneguda i igual a la pressió atmosfèrica:

$$\boxed{p(\mathbf{x}, t) = P_{atm} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{sl}} \quad (10.119)$$

L'equació (10.119) permet, en certs casos, identificar la posició de la superfície lliure (una vegada conegut el camp de pressions) com el lloc geomètric dels punts del fluid on la pressió és igual a la pressió atmosfèrica:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Equació de la} \\ \text{superfície lliure} \end{array} \rightarrow \Gamma_{sl} := \{\mathbf{x} \mid p(\mathbf{x}, t) - P_{atm} = 0\}} \quad (10.120)$$

10.6 Flux laminar i flux turbulent

10.6.1 Flux laminar

Les equacions de la mecànica de fluids descrites als apartats anteriors són vàlides per a un cert rang del moviment dels fluids que s'anomena flux (o règim) laminar. En essència, el flux laminar es caracteritza físicament pel fet

que el fluid es mou en capes paral·leles que no es barregen entre si (vegeu la Figura 10-23).

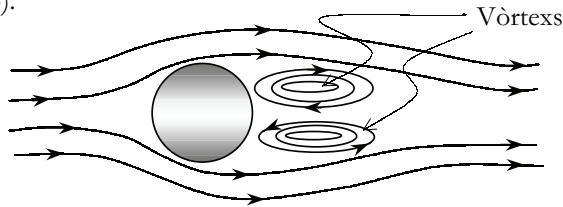


Figura 10-23 – Flux laminar al voltant d'un obstacle

El caràcter laminar del flux s'identifica generalment pel denominat nombre de Reynolds R_e :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Nombre de Reynolds} \rightarrow R_e = \frac{V \times L}{\nu} \\ V = \text{velocitat característica del fluid} \\ L = \text{longitud característica del domini analitzat} \\ \nu = \text{viscositat cinemàtica } (\nu = \frac{\mu}{\rho}). \end{array} \right. \quad (10.121)$$

de manera que valors petits del nombre de Reynolds caracteritzen els fluxos laminars.

10.6.2 Flux turbulent

Quan la velocitat augmenta i la viscositat disminueix, el nombre de Reynolds (10.121) augmenta. Per a valors creixents d'aquest nombre s'observa que el flux laminar inicial es desordena i es torna altament inestable. El flux es pot entendre llavors com una situació en la qual tant la tensió com la velocitat $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, en un punt donat de l'espai, fluctuen ràpidament i de forma aleatòria al llarg del temps i al voltant d'un valor mitjà $\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ (vegeu la Figura 10-24). Aquesta situació es defineix com de *flux* (o règim) *turbulent*.

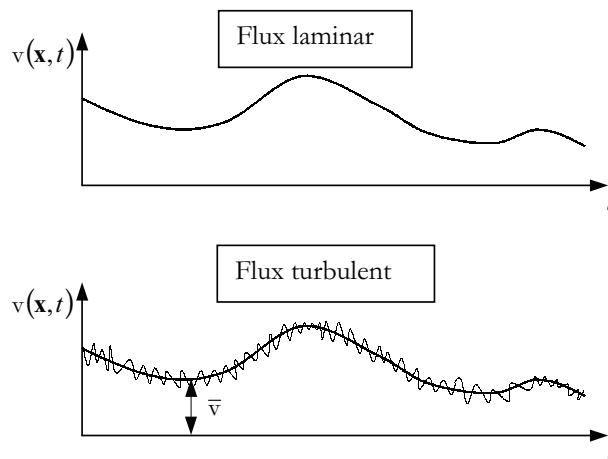


Figura 10-24

Encara que les equacions del problema de mecànica de fluids en general, i les equacions de Navier-Stokes en particular, continuen sent vàlides en règim

fluctuacions de les variables d'aquest) imposen un tractament singular per al flux turbulent. La caracterització matemàtica del règim turbulent es fa llavors a través dels denominats *models de turbulència*. En essència, els models esmentats es basen en aïllar els valors mitjans dels camps de velocitats i pressions de les seves fluctuacions i en obtenir equacions de govern del problema en termes d'aquells.

11 Principis variacionals

11.1 Preliminars

El càlcul variacional és una eina matemàtica que permet treballar amb el que es denomina *forma integral* o *forma feble* de les equacions diferencials de govern d'un problema. Donat un sistema d'equacions diferencials, que s'han de verificar en forma local (punt a punt) en un cert domini, els principis variacionals permeten obtenir una formulació integral (global, en el domini) o formulació feble, la imposició de la qual, tanmateix, garanteix el compliment d'aquelles equacions diferencials. El seu interès rau en el fet que les formulacions integrals són especialment apropiades per al tractament i la resolució del problema per mètodes numèrics.

11.1.1 Funcionals. Derivades funcionals

Definició

Funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$: aplicació d'un espai de funcions \mathbb{X} sobre el cos dels reals:

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}): \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$$

sent $\mathbb{X} := \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}): \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m\}$.

En altres paraules, el funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ és una aplicació que, a cada element $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ (una funció escalar, vectorial o tensorial definida en un domini Ω de \mathbb{R}^3 o, en general, de \mathbb{R}^n) d'un espai de funcions \mathbb{X} fa correspondre un nombre real.

Amb un cert abús del llenguatge, es podria dir que un funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ és una *funció escalar els arguments de la qual són funcions $\mathbf{u}(\mathbf{x})$* .

Exemple 11-1 Considerem un interval $\Omega \equiv [a, b] \in \mathbb{R}$ i l'espai \mathbb{X} constituït per totes les funcions reals de variable real en l'interval $[a, b]$ ($u(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) amb derivades primeres $u'(x)$ integrables a l'interval esmentat. Exemples de possibles funcionals:

$$\mathbb{F}(u) = \int_a^b u(x) dx \quad \mathbb{G}(u) = \int_a^b u'(x) dx \quad \mathbb{H}(u) = \int_a^b F[x, u(x), u'(x)] dx$$

Definició

Sigui $\mathbb{X} := \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^3 \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ un espai de funcions (escalars, vectorials o tensorials) sobre un domini Ω i un funcional $\mathbb{F}(\bullet) : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Siguin dues funcions $\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{X}$ i sigui $\varepsilon \in \mathbb{R}$ un paràmetre (pertorbació). Considerem la funció $\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{X}$, que es pot interpretar com una *funció pertorbada* de la funció \mathbf{u} a la direcció $\boldsymbol{\eta}$. Es defineix la *variació de Gateaux* (o *derivada de Gateaux*) del funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ a la direcció de $\boldsymbol{\eta}$ com:

$$\delta \mathbb{F}(\mathbf{u}; \boldsymbol{\eta}) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbb{F}(\mathbf{u} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}) \right|_{\varepsilon=0}$$

Observació 11-1

Sovint es denota la direcció respecte a la qual es pren la variació com $\boldsymbol{\eta} = \delta \mathbf{u}$ i així es farà amb freqüència d'ara en endavant. No s'ha de confondre $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ amb la diferencial $d\mathbf{u}(\mathbf{x})$ (en el sentit del càlcul infinitesimal) de la funció $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Tanmateix, l'obtenció de la variació de Gateaux d'un funcional té en certs casos *el mateix formalisme* que la diferenciació ordinària de funcions i d'aquí el conegut perill de confusió (vegeu Exemple 11-2).

Exemple 11-2 Sigui el funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{u}) d\Gamma$. Obtenir la seva derivada de Gateaux.

Resolució

$$\begin{aligned} \delta \mathbb{F}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} \mathbb{F}(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} \phi(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) d\Omega \right|_{\varepsilon=0} + \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}) d\Gamma \right|_{\varepsilon=0} = \\ &= \left[\int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \underbrace{\frac{d(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})}{d\varepsilon}}_{\delta \mathbf{u}} d\Omega \right]_{\varepsilon=0} + \left[\int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \underbrace{\frac{d(\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})}{d\varepsilon}}_{\delta \mathbf{u}} d\Gamma \right]_{\varepsilon=0} \Rightarrow \\ &\quad \left[\int_{\Omega} \phi(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \varphi(\mathbf{u}) d\Gamma \right] = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned}$$

Es pot apreciar la semblança formal, en aquest cas, de l'obtenció de la derivada de Gateaux del funcional amb la diferenciació de funcions.

Considerem ara un domini $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, el seu contorn $\partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma$ amb $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ (vegeu la Figura 11-1) i l'espai \mathbb{V} de les funcions $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definides sobre Ω , que prenen un determinat valor $\mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ en el contorn Γ_u :

$$\mathbb{V} := \{\mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \mathbf{u}(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m \quad ; \quad \mathbf{u}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{u}^*(\mathbf{x})\} \quad (11.1)$$

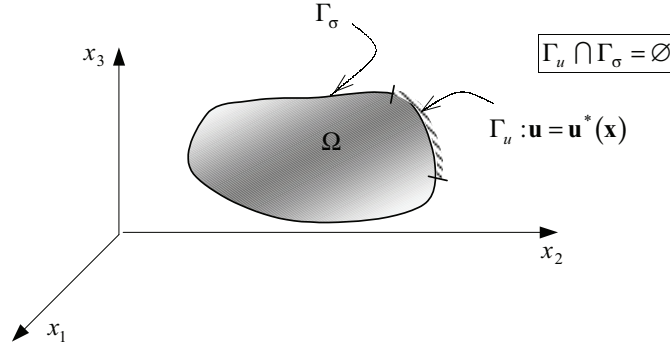


Figura 11-1

Observació 11-2

Respecte a l'obtenció de la derivada de Gateaux, una condició que s'estableix en la mateixa definició sobre la pertorbació $\boldsymbol{\eta} \equiv \delta \mathbf{u}$ és que la funció pertorbada $\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u}$ pertanyi al mateix espai de funcions $\mathbb{V} (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V})$. En aquest cas, si $\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u} \in \mathbb{V}$:

$$\Rightarrow (\mathbf{u} + \varepsilon \delta \mathbf{u})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{u}^* \Rightarrow \underbrace{\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u}}_{\mathbf{u}^*} + \varepsilon \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{u}^* \Rightarrow \varepsilon \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}$$

i la pertorbació $\delta \mathbf{u}$ ha de satisfer: $\delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}$

Sobre la base de la família de funcions (11.1) considerem ara la família de funcionals següent:

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}) d\Gamma \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{V} \quad (11.2)$$

sent ϕ i φ funcions prou regulars per ser integrables en els dominis Ω i Γ_σ , respectivament. Suposarem, a més, que mitjançant les operacions algebraïques adequades, la derivada de Gateaux de $\mathbb{F}(\mathbf{u})$ es pot escriure de la següent manera:

$$\delta \mathbb{F}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbb{E}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbb{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}) \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (11.3)$$

$$\begin{cases} \forall \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0} \end{cases}$$

Exemple 11-3 *Segui el funcional:*

$$\mathbb{F}(u) = \int_a^b \phi[x, u(x), u'(x)] dx \quad \text{con} \quad u(x)|_{x=a} = u(a) = p$$

Obtenu la seva derivada de Gateaux en el format de l'equació (11.3).

Resolució

Es tracta d'un cas particular del funcional (11.2) reduït a una dimensió amb $\varphi \equiv 0$, $\Omega \equiv (a, b)$, $\Gamma_u \equiv a$ $\Gamma_\sigma \equiv b$.

Pertorbant la funció $u(x)$ i reemplaçant en el funcional:

$$\left. \begin{aligned} u(x) &\rightarrow u(x) + \varepsilon \eta(x) \\ u'(x) &\rightarrow u'(x) + \varepsilon \eta'(x) \\ \forall \eta(x) &\equiv \delta u(x) \quad | \quad \eta(a) = \eta_a = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \mathbb{F}(u + \varepsilon \eta) = \int_a^b \phi[x, u(x) + \varepsilon \eta, u'(x) + \varepsilon \eta'] dx$$

La consegüent derivada de Gateaux serà:

$$\delta \mathbb{F}(u; \eta) = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbb{F}(u + \varepsilon \eta) \Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} \eta + \frac{\partial \phi}{\partial u'} \eta' \right] dx$$

D'altra banda, l'anterior expressió pot estar integrada per parts com segueix:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial \phi}{\partial u'} \eta' dx &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial u'} \eta \right]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \eta \right] dx = \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial u'} \Big|_{x=b} \eta_b - \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial u'} \Big|_{x=a} \eta_a}_{\equiv 0} - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \eta \right] dx = \frac{\partial \phi}{\partial u'} \Big|_{x=b} \eta_b - \int_a^b \left[\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \eta \right] dx \Rightarrow \\ \delta \mathbb{F}(u; \delta u) &= \int_a^b \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \right] \delta u dx + \frac{\partial \phi}{\partial u'} \Big|_{x=b} \delta u_b \end{aligned}$$

expressió que és un cas particular de l'equació (11.3) amb:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(x, u, u') &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \quad \forall x \in (a, b) \\ \mathbb{T}(x, u, u') &\equiv \frac{\partial \phi}{\partial u'} \Big|_{x=b} \end{aligned}}$$

11.1.2 Extremes de functionals. Principis variacionals. Equacions d'Euler-Lagrange

Segui $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funció real d'una variable real. Diem que la funció presenta un mínim en $x = x_0$ si:

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (11.4)$$

És ben sabut que una condició necessària perquè f presenti un extrem (mínim, màxim o punt de sella) a $x = x_0$ és que:

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} \stackrel{\text{not}}{=} f'(x_0) = 0 \quad (11.5)$$

Aquest concepte es pot generalitzar als funcionals en un espai de funcions. Donat un funcional $\mathbb{F}(\mathbf{u}): \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, diem que aquest funcional presenta un mínim a $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ si:

$$\mathbb{F}(\mathbf{u}) \leq \mathbb{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{V} \quad (11.6)$$

i una condició necessària perquè aquest funcional presenti un extrem (mínim, màxim o punt de sella) a $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ és que la derivada $\delta \mathbb{F}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u})$ sigui nul·la per a totes les direccions $\delta \mathbf{u}$:

$$\delta \mathbb{F}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad \left| \delta \mathbf{u} \right|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = 0 \quad (11.7)$$

Expressant l'equació (11.7) en el format de l'equació (11.3) es tindrà:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Principi variacional} \\ \delta \mathbb{F}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbb{E} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbb{T} \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \delta \mathbf{u} \\ \left| \delta \mathbf{u} \right|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = 0 \end{array} \right. \end{array}} \quad (11.8)$$

Observació 11-3

Lema fonamental del càlcul variacional:

Donades $\mathbb{E}(\mathbf{x}): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ i $\mathbb{T}(\mathbf{x}): \Gamma_{\sigma} \rightarrow \mathbb{R}^m$ que compleixen

$$\int_{\Omega} \mathbb{E}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \mathbb{T}(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad \left| \delta \mathbf{u} \right|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbb{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma} \end{array} \right.$$

Demostració (indicativa): Considerem l'elecció següent per a $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$:

$$\delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{E}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{0} & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u \\ \mathbb{T}(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma} \end{array} \right.$$

Substituint:

$$\int_{\Omega} \underbrace{\mathbb{E}(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{E}(\mathbf{x})}_{\geq 0} \, d\Omega + \int_{\Gamma_{\sigma}} \underbrace{\mathbb{T}(\mathbf{x}) \cdot \mathbb{T}(\mathbf{x})}_{\geq 0} \, d\Gamma = 0 \quad \Leftrightarrow \mathbb{E}(\mathbf{x}) = \mathbb{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad c.q.d.$$

NOTA

Aquesta demostració no és rigorosa i es proporciona només com a indicació intuïtiva de la línia de raonament que segueix la demostració del lema.

NOTA

En un llenguatge estricte, l'equació (11.8) és una *equació variacional* o la forma feble d'un problema diferencial.

A l'equació (11.8) se la denomina *principi variacional* i, atès que $\delta \mathbf{u}$ és arbitrari, d'acord amb l'Observació 11-3 és totalment equivalent a:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Equacions} \\ \text{d'Euler - Lagrange} \end{array} \rightarrow \mathbb{E}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega} \quad (11.9)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Condicions de} \\ \text{contorn naturals} \end{array}} \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma} \quad (11.10)$$

Observació 11-4

Les equacions (11.9):

$$\mathcal{E}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

són, en general, un conjunt d'equacions diferencials en derivades parcials (EDP) que reben el nom d'*equacions d'Euler-Lagrange* del principi variacional (11.8).

Les equacions (11.10):

$$\mathcal{T}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_{\sigma}$$

constitueixen un conjunt de condicions de contorn sobre aquestes equacions diferencials denominades *condicions de contorn naturals*. Junts amb les condicions (11.1):

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_u$$

denominades *condicions de contorn forçades (essencials)* o de *Dirichlet*, defineixen un sistema la solució del qual $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ és un extrem del funcional \mathbb{F} .

Exemple 11-4 *Segui el funcional de l'Exemple 11-3:*

$$\mathbb{F}(u) = \int_a^b \phi[x, u(x), u'(x)] dx \quad \text{con} \quad u(x)|_{x=a} = u(a) = p$$

Obteniu les seves equacions d'Euler-Lagrange i les condicions de contorn naturals i forçades corresponents.

Resolució

Del resultat de l'Exemple 11-3:

$$\delta \mathbb{F}(u; \delta u) = \int_a^b \left[\frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) \right] \delta u \, dx + \frac{\partial \phi}{\partial u'} \bigg|_{x=b} \delta u_b$$

s'obté directament:

Equació d'Euler - Lagrange	$\rightarrow \mathcal{E}(x, u, u') \equiv \frac{\partial \phi}{\partial u} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u'} \right) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$
Condicions de contorn naturals	$\rightarrow \mathcal{T}(x, u, u') \equiv \frac{\partial \phi}{\partial u'} \bigg _{x=b} = 0$
Condicions de contorn forçades	$\rightarrow u(x) \big _{x=a} = u(a) = p$

11.2 Principi (teorema) dels treballs virtuals

Considerem un volum material de medi continu V_t , ocupant en l'instant t el volum de l'espai V , sotmès a les forces massiques $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ i a les forces superficials $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ sobre el contorn Γ_σ (vegeu la Figura 11-2). Considerem també l'espai funcional \mathbb{V} de tots els *desplaçaments admissibles* (que compleixen la condició de contorn ($\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{u}^*$):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Espai de} \\ \text{desplaçaments} \\ \text{admissibles} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbb{V} := \{\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) : V \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{u}_t(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{u}_t^*(\mathbf{x})\} \quad (11.11)$$

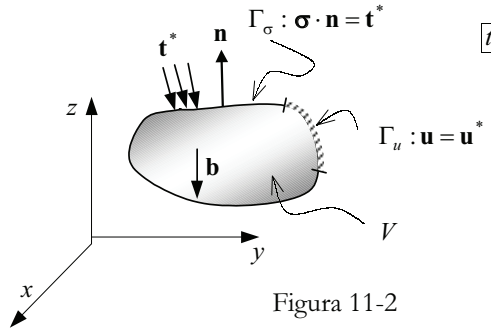


Figura 11-2

Dues de les equacions que governen el comportament del medi són l'equació de Cauchy i l'equació d'equilibri en el contorn Γ_σ :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{u})) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in V \rightarrow \text{Equació de Cauchy} \quad (11.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} - \mathbf{t}^* = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma \rightarrow \text{Equació d'equilibri en el contorn} \quad (11.13)$$

on s'ha considerat la dependència implícita de les tensions amb els desplaçaments (a través de les deformacions i de l'equació constitutiva $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}))$) i la de les acceleracions amb els desplaçaments (a través de l'equació $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}$).

Considerem ara el principi variacional següent:

$$\delta \mathbb{W}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = \underbrace{\int_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}(\mathbf{u}))] \cdot \delta \mathbf{u} \, dV}_{\mathcal{E}} + \underbrace{\int_{\Gamma_\sigma} [\mathbf{t}^* - \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma}_{\mathcal{I}} = 0 \quad (11.14)$$

$$\forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \mid \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}$$

on a les pertorbacions dels desplaçaments $\delta \mathbf{u}$ se les denomina *desplaçaments virtuals*:

$$\text{Desplaçaments virtuals: } \rightarrow \delta \mathbf{u} : V \rightarrow \mathbb{R}^3 ; \quad \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0} \quad (11.15)$$

En vista de les equacions (11.8) i (11.9), les equacions d'Euler-Lagrange del principi variacional (11.14) i les seves condicions de contorn naturals són:

Equacions d'Euler - Lagrange $\mathcal{E} \equiv \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$	(11.16)
Condicions de contorn naturals $\rightarrow \mathcal{T} \equiv \mathbf{t}^* - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma$	

És a dir, l'equació de Cauchy (11.12) i l'equació d'equilibri en el contorn (11.13).

El principi variacional (11.14) es pot reescriure de forma totalment equivalent com s'indica a continuació. Considerant el terme:

$$\left\{ \begin{aligned} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : (\nabla \otimes \delta \mathbf{u}) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla) \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} \delta u_j &= \frac{\partial (\sigma_{ij} \delta u_j)}{\partial x_i} - \sigma_{ij} \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x_i} = \frac{\partial (\sigma_{ij} \delta u_j)}{\partial x_i} - \sigma_{ji} \frac{\partial (\delta u_j)}{\partial x_i} \quad i, j \in \{1, 2, 3\} \end{aligned} \right. \quad (11.17)$$

i descomponent $\delta \mathbf{u} \otimes \nabla$ a la seva part simètrica, $\nabla^s \delta \mathbf{u}$, i la seva part antisimètrica $\nabla^a \delta \mathbf{u}$:

$$\left\{ \begin{aligned} \delta \mathbf{u} \otimes \nabla &= \nabla^s \delta \mathbf{u} + \nabla^a \delta \mathbf{u} \\ \nabla^s \delta \mathbf{u} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [\delta \mathbf{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \delta \mathbf{u}] \\ \nabla^a \delta \mathbf{u} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} [\delta \mathbf{u} \otimes \nabla - \nabla \otimes \delta \mathbf{u}] \end{aligned} \right. \quad (11.18)$$

Substituint l'equació (11.18) en l'equació (11.17):

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{u} \otimes \nabla) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} - \underbrace{\boldsymbol{\sigma} : \nabla^a \delta \mathbf{u}}_{=0} \quad (11.19)$$

RECORDATORI
El tensor $\boldsymbol{\sigma}$ és simètric

i el tensor $\nabla^a \delta \mathbf{u}$ és antisimètric. En conseqüència, el producte resultant és nul ($\boldsymbol{\sigma} : \nabla^a \delta \mathbf{u} = 0$).

$$\Rightarrow (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u} \quad (11.20)$$

Integrant ara l'equació (11.20) sobre el domini V i aplicant el teorema de la divergència, s'obté:

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot dV &= \int_V \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) dV - \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}] dV = \\ &= \int_{\partial V = \Gamma_u \cup \Gamma_\sigma} \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \delta \mathbf{u}) dV - \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}] dV = \end{aligned} \quad (11.21)$$

$$= \int_{\Gamma_u} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \underbrace{\delta \mathbf{u}}_{=0} dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}] dV \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_V (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \cdot dV = \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}] dV} \quad (11.22)$$

on s'han tingut en compte la condició $\delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}$ (vegeu l'equació (11.15)).

Finalment, substituint l'equació (11.20) en la forma original del principi variacional (11.14) s'obté:

$$\begin{aligned}
\delta \mathbb{W}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) &= \int_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a})] \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} (\mathbf{t}^* - [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}]) \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = \\
&= \int_V [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}] \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_V \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_{\Gamma_\sigma} [\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}] \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = \\
&= - \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}] \, dV + \int_V \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma = 0 \Rightarrow
\end{aligned} \tag{11.23}$$

Principi dels treballs virtuals

$$\begin{aligned}
\delta \mathbb{W}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) &= \int_V \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} \, d\Gamma - \int_V [\boldsymbol{\sigma} : \nabla^s \delta \mathbf{u}] \, dV = 0 \\
\forall \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad &| \quad \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = 0
\end{aligned}$$

(11.24)

L'expressió (11.24), que és totalment equivalent al principi variacional original i continua tenint les mateixes equacions d'Euler-Lagrange i condicions de contorn (11.16), rep el nom de *principi* (o teorema) *dels treballs virtuals* (PTV).

Observació 11-5

El PTV és un principi variacional molt aplicat en la mecànica de sòlids que es pot interpretar com la recerca d'un extrem d'un funcional del camp de desplaçaments $\mathbb{W}(\mathbf{u})$, no necessàriament conegut en forma explícita, la variació (derivada de Gateaux) del qual $\delta \mathbb{W}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u})$ és coneguda i ve donada per l'equació (11.14). Atès que les equacions d'Euler-Lagrange del PTV són l'equació de Cauchy (11.12) i d'equilibri en el contorn (11.13), la seva imposició és totalment equivalent (encara que més convenient per a la resolució del problema per mètodes numèrics) a la imposició en forma local d'aquelles equacions i rep el nom de *forma feble* d'aquestes.

Observació 11-6

En la formulació PTV no intervé l'equació constitutiva ni es distingeix el tipus de cinemàtica (deformació finita o infinitesimal), per la qual cosa la seva aplicació no es veu restringida ni pel tipus d'equació constitutiva escollida (elàstica, elastoplàstica, de fluid, etc.) ni per la cinemàtica (deformació finita o infinitesimal) considerada.

11.2.1 Interpretació del principi dels treballs virtuals

Considerem el medi continu en la configuració actual V_t a temps \boxed{t} sotmès a unes forces massiques *fictícies* $\mathbf{b}^*(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ i a les forces superficials reals $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ (vegeu la Figura 11-3) i suportant les tensions reals $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$. Considerem, a més, una configuració virtual (fictícia) $V_{t+\delta t}$ corresponent a l'instant virtual $\boxed{t + \delta t}$ separada de la configuració real pel camp de desplaçaments virtuals (11.15):

$$\boxed{\text{Desplaçaments virtuals} \quad : \rightarrow \delta \mathbf{u}(\mathbf{x}) ; \quad \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}} \quad (11.25)$$

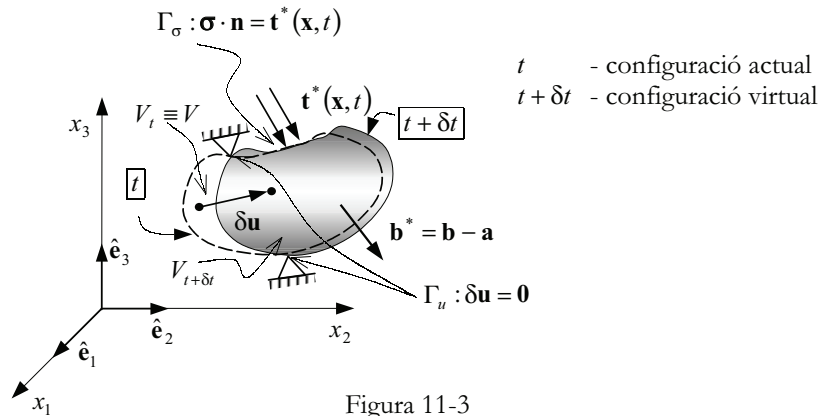


Figura 11-3

Admetent una *cinemàtica de deformació infinitesimal*, les deformacions virtuals associades als desplaçaments virtuals (11.25) serien:

$$\boxed{\text{Deformacions virtuals} \quad : \rightarrow \delta \mathbf{\epsilon} = \nabla^s \delta \mathbf{u}} \quad (11.26)$$

i suposant que les tensions $\sigma(\mathbf{x}, t)$ romanen constants en l'interval de temps $[t, t + \delta t]$, el treball de deformació virtual (*treball virtual intern*) realitzat pel medi durant aquest interval serà:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Treball} \\ \text{virtual} \\ \text{intern} \end{array} \right\} \rightarrow \delta \mathbb{W}^{\text{int}} = \int_V [\sigma : \delta \epsilon] dV = \int_V [\sigma : \nabla^s \delta \mathbf{u}] dV \quad (11.27)$$

Així mateix, suposant que tant les pseudoforces màssiques $\mathbf{b}^*(\mathbf{x}, t)$ com les forces superficials $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ romanen constants durant el procés de deformació virtual en l'interval $[t, t + \delta t]$, el treball que realitzen (*treball virtual extern*) resulta ser:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Treball} \\ \text{virtual} \\ \text{extern} \end{array} \right\} \rightarrow \delta \mathbb{W}^{\text{ext}} = \int_V \rho \underbrace{(\mathbf{b} - \mathbf{a})}_{\mathbf{b}^*} \cdot \delta \mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad (11.28)$$

i de la comparació del PTV en l'equació (11.24) amb les equacions (11.27) i (11.28), el PTV es pot interpretar com:

$$\begin{aligned}
 &\text{Principi dels treballs virtuals} \\
 &\underbrace{\delta\mathbb{W}}_{\text{Treball virtual total}} = \underbrace{\int_V [\boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon}] dV}_{\text{Treball virtual intern } (\delta\mathbb{W}^{int})} - \underbrace{\left[\int_V \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \right]}_{\text{Treball virtual extern } (\delta\mathbb{W}^{ext})} = 0 \Rightarrow \\
 &\delta\mathbb{W} = \delta\mathbb{W}^{int} - \delta\mathbb{W}^{ext} = 0 \\
 &\text{per a qualsevol canvi de configuració virtual} \\
 &\text{cinemàticament admissible } (\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0})
 \end{aligned} \tag{11.29}$$

11.2.2 Principi dels treballs virtuals en funció dels vectors de tensió i de deformació

Dels *tensors* simètrics de tensió, $\boldsymbol{\sigma}$, i de deformació virtual, $\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \delta\mathbf{u}$, de l'equació (11.29), es poden extreure els *vectors* de tensió $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ i de deformació virtual $\{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}$:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} \in \mathbb{R}^6 ; \{\boldsymbol{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} \in \mathbb{R}^6 ; \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\}^{not} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ \delta\gamma_{xy} \\ \delta\gamma_{xz} \\ \delta\gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_x \\ \delta\varepsilon_y \\ \delta\varepsilon_z \\ 2\delta\varepsilon_{xy} \\ 2\delta\varepsilon_{xz} \\ 2\delta\varepsilon_{yz} \end{Bmatrix} \tag{11.30}$$

que satisfan la igualtat:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} : \delta\boldsymbol{\varepsilon} = \{\boldsymbol{\sigma}\} \cdot \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} = \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} \\ \sigma_{ij} \delta\varepsilon_{ij} = \sigma_m \delta\varepsilon_m = \delta\varepsilon_m \sigma_m \end{cases} \quad \begin{cases} i, j \in \{1, 2, 3\} \\ m \in \{1, \dots, 6\} \end{cases} \tag{11.31}$$

Substituint l'equació (11.31) en l'expressió (11.29) del PTV, s'obté:

$$\begin{aligned}
 &\text{Principi dels treballs virtuals en} \\
 &\text{vectors de tensió i deformació} \\
 &\underbrace{\delta\mathbb{W}}_{\text{Treball virtual total}} = \underbrace{\int_V \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}\} \cdot \{\boldsymbol{\sigma}\} dV}_{\text{Treball virtual intern } (\delta\mathbb{W}^{int})} - \underbrace{\left[\int_V \rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \cdot \delta\mathbf{u} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta\mathbf{u} d\Gamma \right]}_{\text{Treball virtual extern } (\delta\mathbb{W}^{ext})} = 0 \Rightarrow \\
 &\delta\mathbb{W} = \delta\mathbb{W}^{int} - \delta\mathbb{W}^{ext} = 0 \\
 &\text{per a qualsevol canvi de configuració virtual} \\
 &\text{cinemàticament admissible } (\delta\mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0})
 \end{aligned} \tag{11.32}$$

que constitueix la forma del PTV més utilitzada en enginyeria.

11.3 Energia potencial. Principi de minimització de l'energia potencial

El funcional \mathbb{W} , en termes del qual s'estableix el principi variacional de l'equació (11.24), només es pot formular *explícitament* sota certes circumstàncies. Un dels casos en què es pot fer és el següent:

1) *Problema elàstic lineal*

En aquest cas l'equació constitutiva es pot escriure a partir del potencial elàstic $\hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})$ de la següent manera:

$$\begin{aligned} \text{Potencial elàstic} \rightarrow \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \frac{\partial \hat{u}(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} &= \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (11.33)$$

2) *Les forces de volum $\rho \mathbf{b}^*(\mathbf{x}, t)$ són conservatives*

És a dir, les forces de volum esmentades deriven d'un potencial $\phi(\mathbf{u})$ i, per tant, es pot escriure:

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\rho \mathbf{b}^* = -\rho(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \quad (11.34)$$

Observació 11-7

Un cas típic de forces de volum conservatives s'obté per al cas quasiestàtic ($\mathbf{a} = \mathbf{0}$) sota forces gravitatòries i densitat constant:

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \equiv \{0, \quad 0, \quad -g\}^T = \text{constant} \quad ; \quad \rho(\mathbf{x}, t) = \text{constant}$$

En aquest cas el potencial de forces de volum té l'expressió:

$$\phi(\mathbf{u}) = -\rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \Rightarrow \frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\rho \mathbf{b}$$

3) *Les forces de superfície $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ són conservatives*

Per tant, deriven d'un potencial $G(\mathbf{u})$ tal que:

$$\mathbf{t}^* = -\frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \quad (11.35)$$

NOTA

La restricció al problema elàstic lineal es pot fer menys estricta i estendre's al cas de materials *biperelàstics* en règim de deformació finita.

Observació 11-8

Un cas típic de forces superficials conservatives ocorre quan el vector tracció $\mathbf{t}^*(\mathbf{x}, t)$ és independent dels desplaçaments ($\frac{\partial \mathbf{t}^*}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0}$). En aquest cas el potencial de forces superficials té l'expressió:

$$\boxed{G(\mathbf{u}) = -\mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u}} \Rightarrow \frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = -\mathbf{t}^*$$

En les circumstàncies anteriors es pot definir el següent funcional denominat *energia potencial* total:

$$\underbrace{\mathbb{U}(\mathbf{u})}_{\text{Energia potencial total}} = \underbrace{\int_V \hat{\mathbf{n}}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})) dV}_{\text{Energia elàstica}} + \underbrace{\int_V \phi(\mathbf{u}) dV}_{\text{Energia potencial de les forces massiques}} + \underbrace{\int_{\Gamma_\sigma} G(\mathbf{u}) d\Gamma}_{\text{Energia potencial de les forces superficials}} \quad (11.36)$$

la variació de Gateaux del qual serà:

$$\delta \mathbb{U}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = \int_V \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbf{n}}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} : \nabla^s(\delta \mathbf{u})}_{\delta \boldsymbol{\varepsilon}} dV + \int_V \underbrace{\frac{\partial \phi(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}}_{-\rho(\mathbf{b}-\mathbf{a})} dV + \int_{\Gamma_\sigma} \underbrace{\frac{\partial G(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \cdot \delta \mathbf{u}}_{-\mathbf{t}^*} d\Gamma = \quad (11.37)$$

$$= \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma \quad \forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}$$

on s'han considerat les equacions (11.33) a (11.35). Comparant l'equació (11.37) amb el PTV (11.29), s'arriba a:

$$\delta \mathbb{W} \equiv \delta \mathbb{U}(\mathbf{u}; \delta \mathbf{u}) = \int_V \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \delta \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (11.38)$$

$$\forall \delta \mathbf{u} \mid \delta \mathbf{u}|_{\mathbf{x} \in \Gamma_u} = \mathbf{0}$$

NOTA

La condició de mínim de l'extrem es demostra a partir del requeriment termodinàmic que \mathbb{C} sigui definit positiu (vegeu el capítol 6).

Observació 11-9*Principi de minimització de l'energia potencial*

El principi variacional (11.38), que continua sent la forma feble de les equacions de Cauchy (11.12) i d'equilibri en el contorn (11.13), és ara la variació de Gateaux del funcional *energia potencial* $\mathbb{U}(\mathbf{u})$ de l'equació (11.36). En conseqüència, el funcional esmentat, que per al cas de forces massiques i superficials constants té la forma:

$$\boxed{\mathbb{U}(\mathbf{u}) = \int_V \underbrace{\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}}_{\hat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\varepsilon})} dV - \int_V \rho(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} dV - \int_{\Gamma_\sigma} \mathbf{t}^* \cdot \mathbf{u} d\Gamma}$$

presenta un extrem (que es pot demostrar que és un mínim) per a la solució del problema elàstic lineal.

Bibliografia

BONET, J.; WOOD, R.D. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, 1997.

CHADWICK, P. *Continuum Mechanics*. Wiley, 1976.

CHUNG, T.J. *Continuum Mechanics*. Prentice-Hall, 1988.

COIRIER, J. *Mécanique des milieux continus*. París: Dunod, 1997.

ERINGEN, A.C. *Mechanics of Continua*. Wiley, 1967.

FUNG, Y.C. *Foundations of Solid Mechanics*. Prentice Hall, 1965.

GREEN, A.E.; ZERNA, W. *Theoretical Elasticity*. Clarendon Press, 1960.

MALVERN, L.E. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, 1969.

MASSAGUER, J.M.; FALQUÉS, A. *Mecánica del continuo. Geometría y dinámica*. Edicions UPC, 1994.

PRAGER, W. *Introduction to Mechanics of Continua*. Ginn and Co., 1961.

SPENCER, A.J.M. *Continuum Mechanics*. Longman, 1980.

TRUESDELL, C.S. *The Elements of Continuum Mechanics*. Springer, 1966.

